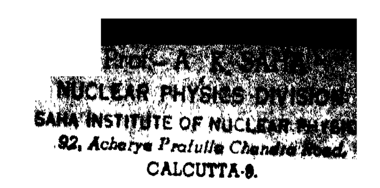


MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON

ET

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Ondes et Mouvements (*Collection de Physique mathématique*). In-8 de 132 pages; 1926 . . . . (*Épuisé*)

La Mécanique ondulatoire (*Mémorial des Sciences physiques*). Fascicule I. In-8 . . . . (*Épuisé*)

Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*). In-8 de VI-224 pages; 1939. (*Épuisé*)

Problèmes de propagations guidées des Ondes électromagnétiques. In-8 de VI-114 pages, avec fig.; 1941.

Théorie générale des Particules à spin (Méthode de fusion). In-8 de 208 pages; 1943.

En collaboration avec Maurice de BROGLIE

Introduction à la Physique des rayons X et des rayons Gamma. In-8 de 201 pages, avec 27 figures et 11 planches hors-texte; 1927.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON

ET

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

PAR

Louis de BROGLIE

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1949

INTRODUCTION

La Théorie quantique des champs électromagnétiques a dû son origine, il y a plus de vingt ans, aux travaux de M. Jordan et de MM. Pauli et Heisenberg (¹) : on en trouvera d'excellents exposés dans les livres de M. Heitler (²) et de M. Wentzel (³).

Nous plaçant à un point de vue assez différent, nous avons développé depuis 1934 une *Mécanique ondulatoire du photon* qui a l'avantage de bien montrer comment la théorie de la lumière vient trouver sa place dans le cadre général de la Mécanique ondulatoire, tout en permettant de retrouver par l'application directe de la seconde quantification la plupart des résultats essentiels de la théorie quantique des champs. Après avoir ébauché cette théorie dans deux fascicules de la collection des *Actualités scientifiques* (Paris, Hermann, n° XIII, 1934 et n° XX, 1936), nous en avons fait un exposé d'ensemble dans un Ouvrage en deux volumes intitulé *Une nouvelle théorie de la lumière : la Mécanique ondulatoire du photon* (Paris, Hermann, 1940-1942), puis dans un autre Ouvrage intitulé *Théorie générale des particules à spin* (Gauthier-Villars, Paris, 1943), où nous avons rattaché la Mécanique ondulatoire du photon à la Théorie générale des particules douées de spin.

Aujourd'hui, il nous paraît intéressant de reprendre, pour les

(¹) *Zeitschrift für Physik*, 56, 1929, p. 1.

(²) *Quantum theory of radiation*, Oxford University Press, 1936.

(³) *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, Fr. Deuticke, Vienne, 1943.

approfondir, les compléter et parfois les rectifier, les résultats exposés dans le premier des deux Ouvrages que nous venons de citer, de façon notamment à bien mettre en évidence ce qui distingue notre Mécanique ondulatoire du photon, de la Théorie quantique des champs électromagnétiques telle qu'elle est usuellement exposée. Nous aurons ainsi l'occasion d'examiner un certain nombre de difficultés et de critiques que peut soulever notre point de vue.

Depuis la rédaction de nos précédents ouvrages sur ce sujet, nous avions eu l'occasion de faire de nouvelles remarques sur la signification physique des algorithmes de la théorie des champs (en particulier celles qui sont exposées au Chapitre IX). Nous avons aussi profité de nos échanges de vues avec les jeunes théoriciens de l'Institut Henri Poincaré, et surtout avec M[me] M.-A. Tonnelat et avec M. Gérard Petiau, qui ont apporté dans ces dernières années à ce genre de questions de très précieuses contributions.

Malgré les points délicats qui subsistent en Mécanique ondulatoire du photon et que nous n'avons pas cherché à dissimuler, il nous semble certain que cette théorie garde le grand mérite de faire voir clairement le véritable sens physique du formalisme assez abstrait de la théorie quantique des champs et de préciser bien des questions qui restent assez obscures dans les exposés qu'on en fait habituellement.

Louis de BROGLIE.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON

ET

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIES NON SUPERQUANTIFIÉES.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ SCHÉMATIQUE DES DIVERSES FORMES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Conceptions générales.** — Nous supposerons connus dans leurs grandes lignes les principes généraux de la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde ainsi que ceux de la théorie de Dirac ([1]). Nous voulons seulement développer ici un schéma général de ces théories qui présente sous une forme condensée quelques-uns de ces principes généraux sans entrer dans les détails.

Dans toutes les formes de la Mécanique ondulatoire (forme primitive à une seule fonction d'onde, théorie de Dirac, Mécanique ondulatoire du photon ou du méson), on représente toujours l'état d'un corpuscule par une certaine fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ définie en chaque point de l'espace et à chaque instant t : cette fonction représente donc un *champ* au sens habituel de la Physique du champ. D'ailleurs, on le sait, la grandeur Ψ est une grandeur complexe qui ne correspond pas à une quantité mesurable (observable au sens de Dirac), mais qui permet seulement de former des grandeurs qui, elles, représentent des grandeurs

([1]) Pour approfondir leur étude, on pourra consulter notamment le livre de l'auteur, *Une nouvelle théorie de la lumière*, t. 1, Chap. III et IV, Hermann, Paris, 1940.

observables. Dans la Mécanique ondulatoi est unique; en théorie de Dirac, elle comporte quatre composantes Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 dont l'ensemble est désigné symboliquement par la lettre Ψ de la même façon que l'on désigne symboliquement par **A** l'ensemble des trois composantes A_x, A_y, A_z d'un vecteur de l'espace à trois dimensions. Dans la théorie du photon et dans celle du méson, la fonction d'onde Ψ a seize composantes; elle en a davantage pour les particules de spin plus élevé.

Dans chaque forme particulière de la Mécanique ondulatoire, intervient toujours un opérateur dit *opérateur hamiltonien* qui représente une certaine opération linéaire effectuée sur une fonction de l'espace où est défini le Ψ, c'est-à-dire en fait dans l'espace ordinaire à trois dimensions quand on considère un seul corpuscule sans spin. Pour plus de généralité, en vue notamment des applications à la seconde quantification, nous dirons sans préciser davantage que l'opérateur hamiltonien (qu'on représente toujours par la lettre H) opère dans l'espace où est définie la fonction Ψ. L'évolution au cours du temps de la fonction Ψ est alors représentée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi.$$

Dans le cas d'un corpuscule sans spin, cette équation d'évolution représente une seule équation aux dérivées partielles. Dans le cas d'un électron de Dirac (électron doué de spin), la fonction d'onde aura quatre composantes Ψ_σ et l'opérateur Hamiltonien pourra opérer non seulement sur les coordonnées x, y, z de l'électron, mais aussi sur l'indice σ qui est susceptible de prendre les valeurs distinctes 1, 2, 3, 4. L'action de l'hamiltonien sur l'indice σ de la fonction d'onde se représentera à l'aide des quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes généralement désignées en théorie de Dirac par α_1, α_2, α_3 α_4. Dans la Mécanique ondulatoire du photon et du méson, il y aura seize composantes du Ψ : ces seize composantes pourront être écrites sous la forme $\Psi_{\sigma\tau}$ avec $\sigma, \tau = 1, 2, 3, 4$ et l'opérateur H agira à la fois sur x, y, z et sur les indices σ et τ, etc.

On obtiendra ainsi dans le cas de l'électron de Dirac quatre équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles obéissent les quatre Ψ_σ; dans le cas du photon et du méson, on obtiendra, comme nous le verrons, seize équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles obéissent les seize $\Psi_{\sigma\tau}$ et dont on pourra déduire seize autres équations du même type, etc.

Pour les particules à spin dont les fonctions d'onde ont plusieurs composantes, on peut dire que les indices de ces composantes constituent des *variables de spin* susceptibles de prendre un certain nombre de valeurs distinctes : l'espace où est définie la fonction d'onde Ψ et où elle évolue suivant l'équation (1) est formé par les variables d'espace x, y, z pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et les variables de spin à nombre fini de valeurs distinctes. Toute intégration sur les variables x, y, z devra s'accompagner d'une sommation sur les variables de spin, si l'on veut avoir sommé sur toutes les variables dont dépend le Ψ. Nous désignerons par D le domaine total de variation des variables x, y, z, σ, τ, ...

Dans les diverses formes de la Mécanique ondulatoire, on peut définir une grandeur de champ construite à partir du Ψ et jouissant de la propriété que son intégrale, dans le domaine d'espace v où est défini le Ψ, reste constante en vertu de l'équation d'évolution (1). Cette grandeur, représentée par la lettre ρ, est nommée *densité de probabilité de présence* et, dans l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde et dans celle de la théorie de Dirac, l'on admet que $\rho(x, y, z, t)\,d\tau$ donne la probabilité pour qu'une expérience permette de localiser à l'instant t le corpuscule dans l'élément de volume $d\tau$ entourant le point x, y, z. Pour que $\rho\,d\tau$ donne cette probabilité en valeur absolue, il faut évidemment que l'intégrale $\int_v \rho\,d\tau$, qui reste constante au cours du mouvement en vertu de l'équation (1), soit égale à l'unité. Mais, l'opérateur H étant linéaire, l'équation (1) l'est aussi et, si Ψ est une certaine solution de (1), $C\Psi$ où C est une constante complexe quelconque en est une autre : on peut donc convenir de choisir la constante C (ou plus exactement son module) de façon que la condition suivante soit satisfaite

$$\int_v \rho\,d\tau = 1. \tag{2}$$

La fonction d'onde est alors dite normée et la normalisation du Ψ ainsi réalisée a une importance essentielle en Mécanique ondulatoire.

Le fait que $\int_v \rho\,d\tau$ reste constante en vertu de l'équation (1) se démontre en prouvant qu'il existe un vecteur $\vec{f}$ d'espace tel que l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \tag{3}$$

soit satisfaite en vertu de l'équation de l'évolution du Ψ. On peut donc considérer ρ et $\mathbf{f}$ comme définissant localement la densité et le mouvement d'un fluide fictif de probabilité tel que la quantité $\rho\, d\tau$ de ce fluide fictif contenue dans l'élément de volume $d\tau$ mesure la probabilité de présence de ce corpuscule dans cet élément de volume. Dans les théories relativistes comme celle de l'électron de Dirac ou celle du photon, les grandeurs ρ, f_x, f_y, f_z apparaissent comme les quatre composantes d'un vecteur densité-flux dans l'espace-temps.

Dans la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde, on a, en désignant par Ψ^* la quantité complexe conjuguée de Ψ,

$$(3)\qquad \rho = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*, \qquad \mathbf{f} = \frac{h}{4\pi i m}\left(\Psi^*\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi - \Psi\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi^*\right)$$

avec la condition de normalisation

$$(4)\qquad \int_{\mathrm{D}} |\Psi|^2\, d\tau = 1,$$

où D est simplement le domaine d'espace v où évolue l'unique fonction d'onde Ψ. En théorie de Dirac, on a

$$(5)\qquad \rho = \sum_{1}^{4}{}_{\sigma}\, \Psi_\sigma^* \Psi_\sigma, \qquad \mathbf{f} = -c \sum_{1}^{4}{}_{\sigma}\, \Psi_\sigma^* \vec{\alpha}\, \Psi_\sigma,$$

où $\vec{\alpha}$ est un vecteur-matrice dont les trois composantes rectangulaires sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ici ρ et $\mathbf{f}$ définissent un quadrivecteur densité-flux dans l'espace-temps et l'on a comme condition de normalisation

$$(6)\qquad \int_{v} dx\, dy\, dz \sum_{1}^{4}{}_{\sigma}\, \Psi_\sigma^* \Psi_\sigma = 1,$$

car ici le domaine D comprend à la fois le domaine v de l'espace où évolue le Ψ et les quatre valeurs distinctes de la variable de spin σ.

2. Opérateurs, valeurs et fonctions propres en Mécanique ondulatoire. — L'opérateur hamiltonien est non seulement *linéaire*, il est aussi *hermitien* : ceci signifie que, si g et f sont deux fonctions réelles ou complexes, mais intégrables et nulles aux limites, des variables qui définissent le domaine D (y compris toujours les variables de spin), on a

$$(7)\qquad \int_{\mathrm{D}} f^* \mathrm{A} g\, d\tau = \int_{\mathrm{D}} g\, \mathrm{A}^* f^*\, d\tau,$$

où l'astérisque indique toujours la quantité complexe conjuguée.

L'introduction en Mécanique ondulatoire d'opérateurs linéaires et hermitiens est un fait tout à fait général en ce sens qu'on y fait correspondre à toute grandeur physique mesurable (observable au sens de Dirac) un tel opérateur. L'opérateur hamiltonien H est celui qui correspond à la grandeur *énergie*. A toute autre grandeur observable, correspond de même un opérateur linéaire et hermitien que nous désignerons par la lettre A.

A chaque opérateur A, donc à chaque grandeur observable, on peut faire correspondre des valeurs propres et des fonctions propres. Considérons en effet l'équation

$$A\varphi = \alpha\varphi, \tag{8}$$

dite *équation aux valeurs propres de l'opérateur* A, où φ est une fonction des variables du domaine D où opère A et où α est une constante, c'est-à-dire une quantité indépendante des dites variables. Le temps t peut d'ailleurs figurer comme paramètre numérique dans A, α et φ. Par définition, on appelle *valeurs propres de l'opérateur* A *dans le domaine* D. les valeurs de la constante α pour lesquelles l'équation (8) admet au moins une solution φ, fonction finie, continue, uniforme et sommable dans D des variables du domaine D. Cette solution est une *fonction propre* de l'opérateur A correspondant à la valeur propre α.

De l'équation (8) et de l'équation conjuguée, on tire aisément la relation

$$\int_D [\varphi^* A\varphi - \varphi A^*\varphi^*]\, d\tau = (\alpha - \alpha^*)\int_D \varphi^*\varphi\, d\tau, \tag{9}$$

et, comme A est hermitien, le premier membre de (9) est nul, ce qui montre que $\alpha = \alpha^*$, c'est-à-dire que α est réel.

L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur hermitien forme le *spectre* de cet opérateur qui peut être continu (spectre de bandes) ou discontinu (spectre de raies) ou même mixte. Si à une même valeur propre correspondent plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes, la valeur propre est dite multiple ou dégénérée. Dans le cas des spectres discontinus de valeurs propres non dégénérées, on démontre aisément que les diverses fonctions propres sont orthogonales entre elles, c'est-à-dire que, si φ_i et φ_k sont les fonctions propres correspondant aux valeurs propres distinctes α_i et α_k, on a

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_k\, d\tau = 0. \tag{10}$$

Comme le caractère linéaire de l'équation (8) entraîne que, si φ_i est une fonction propre, $C\varphi_i$ l'est aussi ; on peut toujours, comme pour les fonctions d'onde Ψ, supposer que les φ_i ont été *normées* par la condition

$$\int_D |\varphi_i|^2 \, d\tau = 1. \tag{11}$$

Nous n'insisterons pas ici sur les complications qui se présentent quand il y a des valeurs propres multiples, ni sur les questions délicates que l'on rencontre dans la normalisation des spectres continus ; on se reportera pour les étudier à d'autres exposés.

Rappelons cependant (¹) que la normalisation des spectres continus conduit à introduire la fonction symbolique de Dirac $\delta(x)$, ainsi que la fonction

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \tag{12}$$

$\mathbf{r}$ étant le rayon vecteur qui joint l'origine au point de coordonnées xyz et que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0); \qquad \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = f(0), \tag{13}$$

la dernière intégrale étant étendue à tout l'espace à trois dimensions où x, y, z sont les coordonnées (espace $\mathbf{r}$) et $d\mathbf{r}$ désignant abréviativement l'élément de volume $dx\,dy\,dz$. On est ainsi conduit aux importantes formules dont nous aurons à nous servir

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk; \qquad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d\mathbf{k}, \tag{14}$$

où $d\mathbf{k} = dk_x\,dk_y\,dk_z$, formules qui se déduisent aisément de la théorie des intégrales de Fourier. Les formules (14) sont des formules symboliques signifiant que les deux membres sont équivalents quand ils figurent sous les signes $\int dx$ et $\int d\mathbf{r}$.

3. Interprétation physique de la Mécanique ondulatoire. Définitions diverses. — Rappelons sur quels principes est fondée l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire.

Pour la Mécanique ondulatoire, l'état d'un corpuscule est défini,

---

(¹) *Nouvelle théorie de la lumière*, t. I, p. 67.

aussi complètement qu'il peut l'être, par la connaissance de l'onde Ψ qui lui est associée. Cette onde Ψ qui représente les connaissances fournies sur le corpuscule par des observations ou des expériences antérieures doit être solution de l'équation d'évolution (1), et nous supposons toujours que cette solution est normée. La connaissance de l'onde Ψ ne permet pas d'attribuer, comme le faisait l'ancienne Physique, une valeur bien déterminée à chaque grandeur attachée au corpuscule : elle permet seulement d'attribuer à chacune de ces grandeurs des valeurs possibles affectées de probabilités. Elle y parvient en admettant les principes généraux que nous allons rappeler.

Tout d'abord, à toute grandeur observable attachée à un corpuscule, la Mécanique ondulatoire fait correspondre un opérateur linéaire et hermitien. Pour l'énergie, cet opérateur est l'opérateur hamiltonien H : pour les autres grandeurs telles par exemple que coordonnées, composantes de quantité de mouvement ou de moment cinétique, l'opérateur se forme, en partant des expressions classiques correspondantes, par des procédés automatiques bien connus que nous ne rappellerons pas ici. L'opérateur correspondant à une grandeur observable attachée à un corpuscule étant linéaire et hermitien, il possède un ensemble de valeurs propres réelles et un système complet de fonctions propres orthonormales (c'est-à-dire orthogonales et normées). Voici alors les deux principes fondamentaux que la Mécanique ondulatoire admet comme bases de son interprétation physique :

1° Les valeurs possibles d'une grandeur observable attachée à un corpuscule, c'est-à-dire les résultats possibles d'une mesure de cette grandeur, sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitien correspondant à cette grandeur.

2° Quand l'état d'un corpuscule est représenté par une certaine fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ solution de l'équation d'évolution (1), la probabilité pour qu'une mesure précise de la grandeur observable correspondant à un opérateur A fournisse à l'instant t une certaine valeur propre α de A, est égale au carré du module du coefficient de la fonction propre correspondante dans le développement de la fonction Ψ suivant les fonctions propres normées de l'opérateur A. D'une façon plus précise, si la fonction d'onde Ψ se développe suivant les fonctions propres de A sous la forme

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i. \qquad (15)$$

la probabilité de la valeur propre α_i est $|c_i|^2$. On vérifie que, Ψ étant normée, on a $\sum_i |c_i|^2 = 1$ en accord avec le théorème des probabilités totales.

On se reportera à des exposés plus détaillés pour voir comment on doit légèrement modifier ce second principe dans les trois cas suivants : 1° quand le spectre de valeurs propres α est continu; 2° quand l'opérateur A a des valeurs propres multiples; 3° quand l'opérateur A n'intéresse qu'une partie seulement des variables du domaine D.

Nous supposerons connue du lecteur la façon dont les principes généraux énoncés ci-dessus permettent de montrer que la quantité $\Psi\Psi^*$ est bien la probabilité de présence en chaque point, de justifier le principe de décomposition spectrale de Born qui détermine les valeurs quantifiées de l'énergie et finalement de conduire aux inégalités d'incertitude de M. Heisenberg. Rappelons seulement que deux grandeurs correspondant aux opérateurs A et B sont simultanément mesurables avec précision si les opérateurs A et B commutent (c'est-à-dire si $AB \equiv BA$) et dans ce cas seulement.

Arrivons-en à la définition des *matrices* de la Mécanique ondulatoire. Ces matrices sont formées à partir des fonctions propres de l'opérateur hamiltonien H par la formule

$$(16) \qquad a_{jk} = \int_D \Psi_j^* A \Psi_k \, d\tau \qquad (a_{kj} = a_{jk}^*),$$

qui donne les éléments a_{jk} de la matrice engendrée par l'opérateur A_{op}. Le domaine D est toujours celui de l'ensemble des variables, y compris les variables de spin. On obtient les matrices d'Heisenberg ou celles de Schrödinger suivant que l'on inclut et que l'on n'inclut pas dans la définition de la fonction propre Ψ_k le facteur exponentiel $e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$.

Rappelons encore la définition des valeurs moyennes étroitement apparentée à celle des éléments de matrices. D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, la valeur moyenne probable de la grandeur observable correspondant à l'opérateur linéaire et hermitien A quand le système est dans l'état représenté par la fonction d'onde $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$ est

$$(17) \qquad \bar{A} = \sum_i \alpha_i |c_i|^2,$$

puisque les valeurs possibles de A sont les α_i et que chaque α_i a la probabilité $|c_i|^2$. On démontre aisément que $\overline{A}$ peut aussi s'écrire

$$\overline{A} = \int_D \Psi^* A \Psi \, d\tau, \tag{18}$$

D étant toujours le domaine de l'ensemble des variables, y compris celles de spin. Remarquons que dans les phénomènes macroscopiques, où intervient un nombre énorme de processus élémentaires, $\overline{A}$ est seul accessible à l'expérience.

Il est évident que si la fonction d'onde Ψ coïncide avec l'une des fonctions propres Ψ_k de l'hamiltonien, on a $\overline{A} = a_{kk}$, ce qui montre le rapport étroit existant entre la définition des valeurs moyennes et celle des éléments de matrice.

Les grandeurs $\Psi_j^* A \Psi_k$ et $\Psi^* A \Psi$ (au besoin sommées sur les variables de spin) apparaissent dans les formules (16) et (18) comme les quantités qu'il faut intégrer dans l'espace pour obtenir les éléments de matrice ou la valeur moyenne pour la grandeur A : on peut donc les nommer *densités d'éléments de matrice* et *densités de valeur moyenne*. Ce sont des grandeurs de champ, c'est-à-dire des fonctions de $xyzt$, alors que les éléments de matrices et les valeurs moyennes qui en résultent par intégration ne sont fonctions que de t. L'examen de l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire montre que ces densités n'ont pas une signification physique aussi bien définie que leurs intégrales : elles ne sont définies qu'à une divergence d'espace près et rien ne permet de choisir entre deux formes de la densité qui sont *intégralement équivalentes*, c'est-à-dire qui donnent les mêmes valeurs pour les intégrales (16) ou (18), car seules ces intégrales possèdent en Mécanique ondulatoire une signification physique précise. Ce sont cependant ces densités qui, dans les théories relativistes comme celle de Dirac, ont une variance bien définie. Elles sont importantes à ce point de vue et aussi parce qu'elles donnent une image (peut-être un peu trompeuse au point de vue quantique) de l'aspect moyen des phénomènes. Ce sont également des quantités de ce type qui définissent les grandeurs électromagnétiques en Mécanique ondulatoire du photon.

4. Évolution au cours du temps des éléments de matrice et des valeurs moyennes. — Considérons un élément de matrice donné par la formule (16). Il peut dépendre du temps par Ψ_j^*, par Ψ_k et même pour l'opérateur A qui peut contenir dans sa définition le paramètre t.

La dérivée de a_{jk} par rapport à t est donc

$$(19)\qquad \frac{da_{jk}}{dt} = \int_D \left[\Psi_j^* \frac{\partial A}{\partial t} \Psi_k + \frac{\partial \Psi_j^*}{\partial t} A \Psi_k + \Psi_j^* A \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right] d\tau$$
$$= \int_D \Psi_j^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right] \Psi_k \, d\tau,$$

la dernière formule s'obtenant en tenant compte du fait que Ψ_k et Ψ_j^* satisfont respectivement à l'équation (1) et à l'équation conjuguée et du fait que H est un opérateur réel et hermitien. $\frac{\partial A}{\partial t}$ est l'opérateur obtenu en dérivant formellement l'opérateur A par rapport au paramètre t. On a donc

$$(20)\qquad \frac{da_{jk}}{dt} = \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right]_{jk}.$$

Il arrive fréquemment que l'opérateur A ne contienne pas le temps dans sa définition : on a alors simplement

$$(21)\qquad \frac{da_{jk}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [AH - HA]_{jk} = \frac{2\pi i}{h} [A, H]_{jk}.$$

$[A, H] = AH - HA$ étant le *commutateur* des opérateurs A et H. On écrit souvent (21) sous la forme symbolique

$$(22)\qquad \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [A, H].$$

Cette notation est brève et élégante, mais elle a, comme beaucoup de notations symboliques, l'inconvénient de masquer un peu le sens véritable de la formule. La dérivée $\frac{dA}{dt}$ n'a, en effet, par elle-même aucun sens quand A ne dépend pas de t et la formule (22) est seulement une représentation symbolique de la manière dont les éléments de matrice dépendent du temps *par l'intermédiaire de* Ψ_k qui n'apparaissent pas explicitement dans (22).

On peut, de même, dériver par rapport au temps une valeur moyenne de la forme (18) et obtenir

$$(23)\qquad \frac{d\bar{A}}{dt} = \int_D \Psi^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right] \Psi \, d\tau,$$

qu'on peut écrire symboliquement

$$(24)\qquad \frac{d\bar{A}}{dt} = \overline{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA)},$$

où, quand A ne dépend pas du temps,

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{2\pi i}{h}[\overline{A, H}], \tag{25}$$

mais, ici encore, il ne faut pas oublier que la variation de $\overline{A}$ dans le temps provient de celles de Ψ et de Ψ^* qui n'apparaissent pas explicitement dans la formule symbolique.

5. Remarques sur les valeurs moyennes dans la théorie quantique des champs. — Les remarques qui précèdent prennent une importance particulière dans la théorie quantique des champs. Cette théorie fait intervenir, nous le verrons, la seconde quantification, c'est-à-dire qu'on y considère un espace où les coordonnées sont les *nombres* de corpuscules (en l'espèce, de photons) dans les divers états énergétiques possibles. Tout point figuratif dans cet espace doit avoir des coordonnées entières, fait qui traduit l'existence même des corpuscules. On considère l'évolution dans l'espace des n d'une certaine fonction d'onde que nous désignerons par R : c'est *la fonction de répartition* telle que $|R(n_1, n_2, \ldots, t)|^2$ donne la probabilité pour qu'il y ait, à l'instant t, n_1 photons dans l'état 1, n_2 dans l'état 2, etc. La fonction R évolue suivant une équation de la forme type

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial R}{\partial t} = \mathcal{H} R, \tag{26}$$

où $\mathcal{H}$ est un opérateur agissant sur les variables n et jouant le rôle d'un Hamiltonien dans l'espace des n.

La théorie quantique des champs électromagnétiques conduit, et ceci est la chose fondamentale, à considérer toutes les grandeurs électromagnétiques comme des opérateurs agissant sur les variables n, opérateurs qui, par ailleurs, sont des fonctions des variables x, y, z, t d'espace et de temps. Ce sont donc des opérateurs opérant sur les n dont l'expression varie d'un point à l'autre de l'espace et d'un instant à l'autre du temps.

Si l'on considère la valeur moyenne correspondant à l'un de ces opérateurs, par exemple à la composante E_x du champ électrique, *valeur moyenne prise dans l'espace des n*, elle se définira par

$$\overline{E}_x = \sum_n R^*(n, \ldots, t)\, E_x R(n, \ldots, t), \tag{27}$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs entières possibles des n

et E_x étant au second membre l'opérateur de l'espace des n correspondant à la composante de champ considérée. La formule (27) nous fournit *au point xyz et à l'instant t pour lesquels nous considérons l'opérateur* E_x la valeur moyenne de la grandeur électromagnétique correspondante quand la répartition est définie par la fonction $R(n, \ldots, t)$. C'est la grandeur $\overline{E}_x$ que la théorie quantique des champs considère comme la valeur observable de la composante x du champ électrique au point xyz à l'instant t dans un champ de très nombreux photons dont la fonction de répartition est $R(n_1, \ldots, t)$: $\overline{E}_x$ définit donc la valeur macroscopique de cette composante de champ.

L'évolution de $\overline{E}_x$ au cours du temps est donnée par la formule symbolique

$$(28) \qquad \frac{d\overline{E}_x}{dt} = \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}[E_x, \mathcal{H}]$$

ou, si l'on définit l'opérateur E_x de l'espace des n de façon qu'il soit indépendant du temps

$$(29) \qquad \frac{d\overline{E}_x}{dt} = \frac{2\pi i}{h}[E_x, \mathcal{H}],$$

la variation de $\overline{E}_x$ provenant en réalité de la variation en fonction du temps de la fonction de répartition $R(n_1 \ldots t)$, qui ne figure pas explicitement dans la formule symbolique (29).

Ces remarques sont essentielles à retenir si l'on veut bien comprendre le sens véritable du formalisme de la théorie quantique des champs. Nous les examinerons à nouveau dans le cadre de la Mécanique ondulatoire du photon.

CHAPITRE II.

DÉRIVATION VARIATIONNELLE DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Introduction d'une fonction de Lagrange. — On peut rattacher les équations de la Mécanique ondulatoire sous leurs diverses formes à un *schéma lagrangien* permettant d'obtenir automatiquement ces équations par des procédés de Calcul des variations et, de plus, de trouver à l'aide de formules générales l'expression des densités de moyenne les plus importantes intervenant dans ces théories. Ce schéma Lagrangien est analogue à celui qu'on rencontre dans beaucoup d'autres branches de la Mécanique et de la Physique.

Nous avons rappelé que la Mécanique ondulatoire introduit systématiquement une grandeur complexe, la fonction d'onde Ψ, fonction des coordonnées d'espace et du temps. Dans la Mécanique ondulatoire primitive, la fonction d'onde n'avait qu'une composante, mais dans la Mécanique ondulatoire de l'électron, du photon, etc., Ψ devient une écriture symbolique représentant l'ensemble des composantes Ψ_1, $\Psi_2 \ldots$ de la fonction d'onde. De plus, Ψ est toujours une grandeur complexe et, à côté de Ψ, on doit donc toujours considérer la quantité complexe conjuguée Ψ^* dont l'équation d'évolution est conjuguée de celle de Ψ.

Pour faire rentrer la Mécanique ondulatoire dans un schéma Lagrangien, on aura à définir une fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ dépendant de Ψ_1, Ψ_2, ..., des dérivées spatiales et temporelles $\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}$, $\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \dot{\Psi}_1$, etc., ainsi que des quantités conjuguées. Si des actions extérieures s'exercent sur le corpuscule considéré, $\mathcal{L}$ pourra aussi dépendre explicitement de x, y, z, t. Nous admettrons que $\mathcal{L}$ est toujours une fonction bilinéaire *réelle* [1] des quantités étoilées et non étoilées, c'est-à-dire que $\mathcal{L}$ est une somme de termes dont chacun contient le produit d'un des Ψ_σ ou d'une des dérivées des Ψ_σ par un Ψ_σ^* ou l'une des dérivées des Ψ_σ^*. Ces définitions et hypothèses étant posées, en ce

[1] Sur cette hypothèse de réalité de $\mathcal{L}$, *voir* le paragraphe 6 du présent chapitre.

qui concerne la fonction de Lagrange, nous envisagerons l'intégrale

$$(1)\qquad I=\int_V d\tau\int_{t'}^{t''} dt\,\mathcal{L}\left(\Psi_1, \frac{\partial\Psi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Psi_1}{\partial y}, \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}, \dot\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_1^*, \ldots\right),$$

où V est le domaine de variation des coordonnées d'espace, $t''-t'$ celui des variations de la coordonnée t. Maintenons constants les domaines V et $t''-t'$ et imposons ([1]) aux Ψ_σ et aux Ψ_σ^* des variations $\delta\Psi_\sigma$ et $\delta\Psi_\sigma^*$ telles que ces variations soient nulles aux limites de V et pour les instants $t=t'$ et $t=t''$.

La variation corrélative de I est

$$(2)\qquad \delta I=\int_{t'}^{t''} dt\int_V \delta\mathcal{L}\,d\tau$$

$$=\int_{t'}^{t''} dt\int_V d\tau\left\{\sum_\sigma\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma}\delta\Psi_\sigma+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dfrac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_i}}\delta\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_i}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi_\sigma}\delta\dot\Psi_\sigma\right]\right\}+\text{conj.}$$

Cette forme de δI résulte de l'hypothèse que $\mathcal{L}$ est une fonction bilinéaire réelle des quantités étoilées et non étoilées, de sorte que la partie de δI qui dépend des $\delta\Psi_\sigma$, $\delta\dfrac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_i}$ et $\delta\dot\Psi_\sigma$ est la quantité conjuguée de celle qui dépend des $\delta\Psi_\sigma^*$, $\delta\dfrac{\partial\Psi_\sigma^*}{\partial x_i}$ et $\delta\dot\Psi_\sigma^*$.

Un procédé d'intégration par parties qui est classique en Calcul des variations permet de transformer δI en lui donnant la forme

$$(3)\qquad \delta I=\int_{t'}^{t''} dt\int_V d\tau\sum_\sigma\delta\Psi_\sigma\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\sigma,i}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi_\sigma}\right\}+\text{conj.},$$

où nous avons posé

$$(4)\qquad \Psi_{\sigma,i}=\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_i}\qquad (i=1, 2, 3).$$

On admet comme postulat que le champ Ψ est tel que l'intégrale I soit un extremum pour des variations quelconques $\delta\Psi_\sigma$ et $\delta\Psi_\sigma^*$ soumises aux conditions précisées ci-dessus. On est donc amené à poser

Field Eqns

$$(5)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma}-\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\sigma,i}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi_\sigma}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\sigma^*}-\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\sigma,i}^*}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi_\sigma^*}=0.\end{cases}$$

Eqn. of Evolution Ψ_σ^*, Ψ_σ

([1]) Dans ce paragraphe et dans le suivant, l'indice σ représente l'ensemble des indices des Ψ.

En raison de la forme bilinéaire de $\mathcal{L}$, le second système d'équations nous donne les équations d'évolution des Ψ_σ et le premier les équations d'évolution des Ψ_σ^*. De plus, en raison de la réalité de $\mathcal{L}$, ces deux groupes d'équations d'évolution sont conjugués l'un de l'autre, comme cela doit être. Finalement, on obtient ainsi pour les Ψ_σ des équations aux dérivées partielles simultanées (au plus du second ordre) en nombre égal à celui des composantes du Ψ. Ce sont les équations d'évolution du champ Ψ.

On peut remarquer en passant que si l'on ajoute à la fonction de Lagrange une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda_i(\Psi_1 \ldots) + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_0(\Psi_1 \ldots)$$

(ce qui revient à ajouter à I l'intégrale d'une divergence d'espace-temps), rien n'est changé aux équations d'évolution. On peut donc dire que la fonction de Lagrange n'est définie qu'à une divergence d'espace-temps près.

Rappelons qu'en Mécanique analytique ordinaire, on peut définir l'énergie H à partir de la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ et des moments $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ par la formule

$$\text{(6)} \qquad H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}.$$

Ici nous définirons les moments conjugués de Ψ_σ et de Ψ_σ^* en posant

$$\text{(7)} \qquad \pi_\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\sigma}, \qquad \pi_\sigma^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\sigma^*},$$

puis, comme les Ψ_σ et Ψ_σ^* jouent en chaque point xyz le rôle des q_i de la Mécanique analytique, nous serons amenés à penser que l'énergie du champ Ψ doit être donnée par $\int_V w\, d\tau$ avec, par analogie à (6),

$$\text{(8)} \qquad w = \sum_\sigma \dot{\Psi}_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\sigma} + \sum_\sigma \dot{\Psi}_\sigma^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\sigma^*} - \mathcal{L} = \sum_\sigma \left(\pi_\sigma \dot{\Psi}_\sigma + \pi_\sigma^* \dot{\Psi}_\sigma^*\right) - \mathcal{L}.$$

Cette prévision sur la forme de w va se trouver bien vérifiée plus loin.

Notons enfin qu'il est souvent commode d'introduire dans les formules précédentes les coordonnées d'Univers $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$,

$x_4 = ict$, ainsi que la convention bien connue de sommation sur les indices deux fois répétés, convention qu'on appliquera aux indices des x_k et aussi à ceux des Ψ_σ. On notera bien cependant que le passage à l'imaginaire conjuguée représentée par les astérisques ne porte *jamais* sur les facteurs i introduits par l'emploi des coordonnées d'Univers. Nous généraliserons la définition (4) en l'appliquant à l'indice $i = 4$. Avec ces conventions, les équations (5) s'écrivent simplement

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,l}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_{\sigma,l}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_\sigma}.$$

2. Densités de valeurs moyennes dans le schéma lagrangien. — Considérons maintenant le tenseur de rang deux

$$(10) \qquad T_{ik} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\Psi_{\sigma,k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_{\sigma,i}}\Psi^*_{\sigma,k} + \mathcal{L}\,\delta_{ik},$$

où δ_{ik} est le symbole classique de Kronecker égal à 1 pour $i = k$ et à 0 pour $i \neq k$.

Calculons $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$ en supposant que $\mathcal{L}$ ne dépende pas de $xyzt$ (pas d'actions extérieures sur le corpuscule). On trouve

$$(11) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = & -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\right)\Psi_{\sigma,k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\frac{\partial \Psi_{\sigma,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma}\Psi_{\sigma,i}\,\delta_{ik} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,j}}\frac{\partial \Psi_{\sigma,j}}{\partial x_i}\delta_{ik} + \text{conj.} = -\Psi_{\sigma,k}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma}\right] \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\left[\frac{\partial \Psi_{\sigma,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Psi_{\sigma,k}}{\partial x_i}\right] + \text{conj.} \end{aligned}$$

Le deuxième crochet est visiblement nul, par suite de la commutativité des dérivations et le premier crochet est aussi nul en vertu de (9). Il en est de même des quantités conjuguées et l'on a finalement (ne pas oublier qu'il y a sommation sur i)

$$(12) \qquad \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Cette relation de divergence nulle nous fournit quatre relations qui peuvent être considérées comme exprimant les conservations de l'énergie et des composantes de l'impulsion si l'on regarde T_{ik} comme le tenseur impulsion-énergie du champ Ψ. Ce point de vue est confirmé par le fait que, si $\mathcal{L}$ dépendait de $xyzt$, le second membre de (12), au lieu d'être nul, serait égal à $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}$.

Les équations (12) où $k = 1, 2, 3$ doivent donc exprimer la conservation des composantes de l'impulsion. On en déduit aisément que T_{41}, T_{42} et T_{43} sont les densités d'impulsion du champ Ψ multipliées par ic, tandis que les T_{ik} avec $i, k = 1, 2, 3$ sont les composantes du tenseur des tensions dans le champ.

L'équation avec $k = 4$ doit exprimer la conservation de l'énergie : T_{14}, T_{24} et T_{34} sont donc les composantes du flux de l'énergie multipliées par $\frac{i}{c}$, tandis que T_{44} doit être la densité d'énergie multipliée par $i^2 = -1$. On vérifie bien, en effet, que $T_{44} = -w$, w étant définie par (8).

Le tenseur T_{ik} défini ci-dessus n'est pas symétrique. En particulier, le tenseur des tensions n'est pas symétrique ($T_{12} \neq T_{21}, \ldots$) et les composantes du flux de l'énergie ne sont pas égales aux densités des composantes d'impulsion multipliées par c^2 (car $T_{14} \neq T_{41}, \ldots$). La plupart des auteurs admettent que l'on doit rendre le tenseur T_{ik} symétrique en le remplaçant par $\frac{T_{ik} + T_{ki}}{2}$. Ce n'est pas l'avis de M. Olivier Costa de Beauregard, qui a donné dans sa Thèse des arguments tendant à faire conserver le tenseur T_{ik} sous la forme non symétrique (10). D'accord avec lui, nous conserverons cette forme non symétrique.

A partir de la fonction de Lagrange, nous pouvons aussi définir un quadrivecteur d'espace-temps jouant le rôle de vecteur densité-flux. Nous le définissons en posant

(13) $$f_i = \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\Psi_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_{\sigma,i}}\Psi^*_\sigma\right] \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En particulier la composante de temps f_4 donnera la probabilité de présence

(14) $$\rho = \frac{f_4}{ic} = \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi'_\sigma}\Psi_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi'^*_\sigma}\Psi^*_\sigma\right].$$ = probabilit[illegible]

Pour que le quadrivecteur **f** joue le rôle de vecteur densité-flux, on doit poser l'équation de continuité

(15) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Or, en tenant compte des équations (9), on trouve aisément

(16) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\Psi_{\sigma,i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\right)\Psi_\sigma\right] + \text{conj.}$$
$$= \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma,i}}\Psi_{\sigma,i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma}\Psi_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_{\sigma,i}}\Psi^*_{\sigma,i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_\sigma}\Psi^*_\sigma\right].$$

Pour prouver que $\frac{\partial f_l}{\partial x_l}$ est nul, on peut partir de la remarque suivante : les Ψ_σ, même normalisés, ne sont jamais définis qu'à un facteur de phase de la forme $e^{i\alpha}$ près, où α est un nombre réel, le facteur $e^{i\alpha}$ étant le même pour tous les Ψ_σ. Certains auteurs nomment cette propriété *l'invariance de jauge de première espèce*. On doit donc admettre que la fonction et les équations de Lagrange sont insensibles à toute variation de α. Or pour une variation infinitésimale $\delta\alpha$ de α, Ψ_σ varie de $\delta\Psi_\sigma = \Psi_\sigma e^{i(\alpha+\delta\alpha)} - \Psi_\sigma e^{i\alpha} \sim i\delta\alpha\Psi_\sigma$. De même, on a $\delta\Psi_{\sigma,l} \simeq i\,\delta\alpha\Psi_{\sigma,l}$; $\delta\Psi^*_\sigma \sim -i\,\delta\alpha\Psi^*_\sigma$ et $\delta\Psi^*_{\sigma,l} \simeq -i\,\delta\alpha\Psi^*_{\sigma,l}$. Dans l'expression (16), le crochet est donc, au facteur $i\,\delta\alpha$ près, égal à la variation qu'éprouve $\mathcal{L}$ quand on fait varier la phase de $\delta\alpha$; comme cette variation doit être nulle, on en conclut que $\frac{\partial f_l}{\partial x_l} = 0$, ce qui permet de considérer le quadrivecteur **f** comme représentant la densité et le flux d'un fluide fictif qui se conserve, fluide qui symbolise la probabilité de présence du corpuscule.

En raison des difficultés qui se présentent pour l'interprétation du vecteur densité-flux dans le cas des corpuscules de spin supérieurs à $\frac{1}{2}$, difficultés dont nous aurons à reparler à propos du photon ([1]), certains auteurs préfèrent considérer systématiquement, au lieu de **f**, le quadrivecteur ε**f**, où ε est la charge électrique du corpuscule. Ce quadrivecteur doit représenter les densités moyennes de charge électrique et de courant électrique liées au champ Ψ. On remarque alors que le quadrivecteur

$$\varepsilon f_l = \frac{2\pi i\varepsilon}{h}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\sigma,l}}\Psi_{\sigma,l} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*_{\sigma,l}}\Psi^*_{\sigma,l}\right] \qquad (17)$$

serait nul identiquement si les Ψ_σ étaient réels (car alors $\Psi_\sigma = \Psi^*_\sigma$ et $\Psi_{\sigma,l} = \Psi^*_{\sigma,l}$) et l'on en conclut : tandis que les particules *chargées* doivent être représentées par des fonctions d'onde *complexes*, les particules *neutres* doivent être représentées par des fonctions Ψ *réelles*. Ce point de vue qui se rattache à des questions difficiles sur lesquelles nous aurons à revenir, ne nous paraît pas s'imposer. On peut, en effet très bien admettre que les particules, qu'elles soient chargées ou neutres, sont représentées par des fonctions d'onde complexes et que le vecteur densité-flux d'électricité est nul pour les particules neutres

---

([1]) Pour plus de détails pour ces difficultés, consulter L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin*, Chap. IX, Paris, Gauthier-Villars, 1943.

simplement parce que leur charge électrique [qui figure en facteur dans (17)] est nulle. Nous nous bornerons pour l'instant à cette indication.

3. Application du schéma lagrangien à la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde. — Dans la Mécanique ondulatoire *relativiste* à une fonction d'onde, on adopte pour le corpuscule libre la fonction de Lagrange suivante

$$(18)\qquad \mathcal{L} = -\left[c^2\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_i} + k_0^2\Psi\Psi^*\right] = |\dot\Psi|^2 - c^2|\operatorname{grad}\Psi|^2 - k_0^2|\Psi|^2,$$

avec

$$(19)\qquad k_0 = \frac{2\pi m_0 c}{h}.$$

$\mathcal{L}$ est bien une fonction bilinéaire réelle de Ψ, de Ψ^* et de leurs dérivées. On en tire

$$(20)\qquad \begin{cases} \pi = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi} = \dot\Psi^*, & \pi^* = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Psi^*} = \dot\Psi, & \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,i}} = -c^2\dfrac{\partial\Psi^*}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*_{,i}} = -c^2\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i}, & \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = -k_0^2\Psi^*, & \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*} = -k_0^2\Psi. \end{cases}$$

Les équations de Lagrange donnent

$$(21)\qquad (\square + k_0^2)\Psi = 0, \qquad (\square + k_0^2)\Psi^* = 0, \qquad \left(\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right).$$

Ce sont les équations de propagation de la Mécanique ondulatoire relativiste à une fonction d'onde. On trouve également

$$(22)\qquad w = \pi\dot\Psi + \pi^*\dot\Psi^* - \mathcal{L} = |\dot\Psi|^2 + c^2|\operatorname{grad}\Psi|^2 + k_0^2|\Psi|^2,$$

et plus généralement

$$(23)\qquad \begin{aligned} T_{ik} &= \mathcal{L}\,\delta_{ik} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,i}}\Psi_{,k} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*_{,i}}\Psi^*_{,k} \\ &= -\left[c^2\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_j} + k_0^2\Psi\Psi^*\right]\delta_{ik} + c^2\left[\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_k} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_k}\right]. \end{aligned}$$

Pour les composantes du quadrivecteur densité-flux, on trouve

$$(24)\qquad f_i = \frac{2\pi i}{h}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\sigma,i}}\Psi_\sigma - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*_{\sigma,i}}\Psi^*_\sigma\right] = \frac{2\pi i}{h}c^2\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\Psi^* - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x_i}\Psi\right].$$

Nous n'insisterons pas davantage sur la Mécanique ondulatoire relativiste à une fonction d'onde, qui a l'inconvénient de ne pas rentrer dans le schéma quantique général, son équation de propagation étant du second ordre par rapport au temps.

Quant à la Mécanique ondulatoire non relativiste, dont l'équation de propagation est du type canonique, son caractère non relativiste ne permet pas de lui appliquer dans son ensemble le schéma lagrangien de forme relativiste développé dans les précédents paragraphes.

4. Le schéma lagrangien de la théorie de Dirac [1] **(théorie de la particule de spin 1/2).** — La théorie de Dirac est une forme relativiste de la Mécanique ondulatoire qui satisfait au schéma quantique général : ses équations paraissent être valables pour toutes les particules de spin 1/2. Elle fait intervenir quatre composantes Ψ_σ de la fonction d'onde et on peut la faire dériver de la fonction de Lagrange

$$(25)\quad \mathcal{L} = \frac{hc}{4\pi i}\left\{\Psi^*_\sigma\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_1\Psi_\sigma - \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2\Psi_\sigma - \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3\Psi_\sigma - ik_0\alpha_4\Psi_\sigma\right]\right\} + \text{conj.},$$

k_0 étant encore défini par (19). Dans cette formule (25), les symboles α_1, α_2, α_3, α_4 sont les quatre matrices hermitiennes de Dirac telles que l'on ait

$$(26)\qquad \alpha_i^2 = 1, \qquad \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq k,$$

avec la condition d'hermiticité

$$(27)\qquad (\alpha_i)_{\sigma\tau} = (\alpha_i)^*_{\tau\sigma}.$$

Nous adopterons pour les α_i les formes usuelles

$$(28)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

---

[1] Pour approfondir la théorie de Dirac, on pourra consulter le livre déjà cité : *Théorie générale des particules à spin*, Chap. V et VI.

Dans la formule (25), le symbole $\alpha_i \Psi_\sigma$ représente la combinaison linéaire suivante des Ψ_σ

$$(29) \qquad \alpha_i \Psi_\sigma = \sum_{1}^{4}{}_{\tau} (\alpha_i)_{\sigma\tau} \Psi_\tau,$$

et l'on posera de même

$$(29') \qquad \Psi^*_\sigma \alpha_i = \sum_{1}^{4}{}_{\tau} \Psi^*_\tau (\alpha_i)_{\tau\sigma}.$$

Avec ces définitions et conventions, on voit que $\mathcal{L}$ est bien une fonction bilinéaire réelle des Ψ_σ et des Ψ^*_σ et de leurs dérivées. On notera en passant que

$$(30) \qquad [\Psi^*_\sigma \alpha_i \Psi_\sigma]^* = [\Psi^*_\sigma (\alpha_i)_{\sigma\tau} \Psi_\tau]^* = \Psi^*_\tau (\alpha_i)_{\tau\sigma} \Psi_\sigma = \Psi^* \alpha_i \Psi_\sigma.$$

Les équations (9) de Lagrange sont ici

$$(31) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \Psi_\sigma) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\alpha_2 \Psi_\sigma) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\alpha_3 \Psi_\sigma) + i k_0 \alpha_4 \Psi_\sigma \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Psi^*_\sigma}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\Psi^*_\sigma \alpha_1) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\Psi^*_\sigma \alpha_2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\Psi^*_\sigma \alpha_3) - i k_0 \alpha_4 \Psi^*_\sigma \\ \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Ces équations sont bien en accord avec la forme canonique

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathrm{H}\Psi,$$

si l'on pose

$$(32) \qquad \mathrm{H} = \frac{hc}{2\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3 + i k_0 \alpha_4\right].$$

Les équations (31) sont les équations de Dirac pour les Ψ_σ et Ψ^*_σ. Il en résulte que

$$(33) \qquad \mathcal{L} = 0.$$

Les équations de Dirac forment un système de quatre équations linéaires aux dérivées partielles simultanées du premier ordre en Ψ_σ (et en Ψ^*_σ). Nous n'étudierons pas les solutions de ces équations, renvoyant le lecteur aux traités spéciaux, mais nous allons calculer le quadrivecteur densité-flux et le tenseur impulsion-énergie.

Pour le quadrivecteur densité-flux, les formules générales nous donnent

$$(34)\qquad \begin{cases} f_i = \dfrac{2\pi i}{h}\left[\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\sigma,i}}\Psi_\sigma - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^*_{\sigma,i}}\Psi^*_\sigma\right] = -c\Psi^*_\sigma\alpha_i\Psi_\sigma \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \rho = \dfrac{f_4}{ic} = \Psi^*_\sigma\Psi_\sigma. \end{cases}$$

L'expression de ρ est l'expression bien connue de la densité de probabilité de présence en théorie de Dirac. En multipliant f_i et ρ par la charge $\varepsilon = -e$ de l'électron, on passera au quadrivecteur densité-flux d'électricité.

Dans le calcul des T_{ik}, on trouve pour i, $k = 1, 2, 3$, compte tenu de (33),

$$(35)\qquad T_{ik} = \frac{hc}{4\pi i}\left[\Psi^*_\sigma\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_i\Psi_\sigma - \frac{\partial\Psi^*_\sigma}{\partial x_k}\alpha_i\Psi_\sigma\right],$$

puis, pour $k = 1, 2, 3$,

$$(36)\qquad \begin{cases} T_{k4} = \dfrac{hc}{4\pi i}\left[\Psi^*_\sigma\alpha_k\dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t} - \dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\Psi^*}{\partial t}\alpha_k\Psi\right]; \\ T_{4k} = \dfrac{hc}{4\pi}\left[\Psi^*_\sigma\dfrac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_k} - \dfrac{\partial\Psi^*_\sigma}{\partial x_k}\Psi_\sigma\right]. \end{cases}$$

On peut vérifier que les T_{4k} sont les composantes de la densité d'impulsion, multipliées par ic, tandis que les T_{k4} sont celles du flux de l'énergie multipliée par $\frac{i}{c}$. Enfin, on trouve

$$(37)\qquad \begin{aligned} T_{44} &= \frac{hc}{4\pi i}\left\{\Psi^*_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3 + ik_0\alpha_4\right)\Psi_\sigma\right\} + \text{conj.} \\ &= -\frac{1}{2}\Psi^*_\sigma H\Psi_\sigma + \text{conj.} = -\frac{h}{4\pi i}\Psi^*_\sigma\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t} + \text{conj.}, \end{aligned}$$

et l'on vérifie aisément pour l'onde plane monochromatique que T_{44} est bien la densité d'énergie changée de signe.

Finalement on a trouvé comme densités de valeur moyenne pour l'énergie et pour les composantes de l'impulsion

$$(38)\qquad \begin{cases} w = -T_{44} = \dfrac{1}{2}[\Psi^*_\sigma H\Psi_\sigma + \text{conj.}]; \\ g_k = \dfrac{T_{4k}}{ic} = -\dfrac{h}{4\pi i}\Psi^*_\sigma\dfrac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x_k} + \text{conj.} = \dfrac{1}{2}\Psi^*_\sigma p_k\Psi_\sigma + \text{conj.} \end{cases}$$

5. Le spin de l'électron. — Nous allons maintenant définir le spin d'une particule obéissant aux équations de Dirac.

D'après l'expression (38) de g_k, on voit que le moment cinétique orbital sera défini par un tenseur antisymétrique d'espace M_{ik} de composantes

$$\rightarrow = \int_V \left(x_i \frac{T_{4k}}{ic} - x_k \frac{T_{4i}}{ic} \right) d\tau$$

$$(39) \quad M_{ik} = \int_V (x_i g_k - x_k g_i)\, d\tau$$
$$= -\frac{h}{4\pi i} \int_V \left[\Psi_\sigma^* x_i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_k} - \Psi_\sigma^* x_k \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_\sigma^*}{\partial x_i} x_k \Psi_\sigma - \frac{\partial \Psi_\sigma^*}{\partial x_k} x_i \Psi_\sigma \right] d\tau.$$

Or, on démontre facilement qu'en théorie de Dirac le moment d'impulsion ainsi défini n'est pas une intégrale première, c'est-à-dire que les M_{ik}, qui sont les parties réelles des valeurs moyennes correspondant aux opérateurs

$$(40) \qquad M_{ik} = \frac{h}{2\pi i} \left[x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \right],$$

ne sont pas constantes au cours du temps. En effet, on vérifie que les opérateurs M_{ik} ne commutent pas avec l'Hamiltonien H donné par (32), de sorte que

$$(41) \qquad \dot{M}_{ik} = \frac{2\pi i}{h} [M_{ik}, H]$$

n'est pas nul. On est alors amené à ajouter aux M_{ik} des opérateurs S_{ik} tels que les $M_{ik} + S_{ik}$ soient des intégrales premières et les S_{ik} ainsi ajoutés définissent le *spin* ou *moment cinétique propre* de l'électron.

Pour retrouver par une voie un peu différente la définition du spin, on peut procéder comme il suit. Nous avons vu que le tenseur T_{ik} adopté précédemment n'est pas symétrique. Cette non-symétrie entraîne la non-constance du moment d'impulsion. Considérons, en effet, le tenseur suivant de rang 3, antisymétrique sur ses deux derniers indices

$$(42) \qquad M_{i[kl]} = T_{ik} x_l - T_{il} x_k,$$

et calculons la divergence $\frac{\partial}{\partial x_i} M_{i[kl]}$. Comme $\frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik}$ est nul, on a

$$(43) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} M_{i[kl]} = T_{ik} \frac{\partial x_l}{\partial x_i} - T_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = T_{lk} - T_{kl} \neq 0.$$

Si nous intégrons la formule précédente dans le domaine d'espace V en supposant toutes les grandeurs nulles aux limites de V, les termes du premier membre où $i \neq 4$, donnent une divergence d'espace dont l'inté-

grale est nulle et il reste

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{M_{4kj}}{ic}\, d\tau = \int_V (T_{jk} - T_{kj})\, dt. \tag{44}$$

Le premier membre est la dérivée par rapport au temps du moment d'impulsion orbital (39) : cette dérivée serait donc nulle si T était symétrique, mais elle n'a pas de raison d'être nulle, puisque T n'est pas symétrique.

Mais on peut déduire de T_{ik} un tenseur symétrique en posant

$$T'_{ik} = \frac{1}{2}\left[T_{ik} + T_{ki}\right]. \tag{45}$$

et l'on peut vérifier que $\frac{\partial}{\partial x_i} T'_{ik} = 0$. Il résulte alors de ce qui précède que le moment d'impulsion

$$\overline{M}'_{ik} = \int_V \left[\frac{T'_{4k}}{ic} x_i - \frac{T'_{4i}}{ic} x_k\right] d\tau, \tag{46}$$

formé à partir de T′, reste constant au cours du temps. On trouve d'ailleurs

$$\begin{aligned} M'_{ik} = {} & \frac{1}{2}\int_V \left(-\frac{h}{4\pi i}\right)\left[\Psi^*_\sigma x_i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_k} - \Psi^*_\sigma x_k \frac{\partial \Psi^*_\sigma}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Psi^*_\sigma}{\partial x_i} x_k \Psi_\sigma - \frac{\partial \Psi^*_\sigma}{\partial x_k} x_i \Psi_\sigma\right] d\tau \\ & + \frac{1}{2}\int_V \left(-\frac{h}{4\pi i}\right)\left[\Psi^*_\sigma(\alpha_k x_i - \alpha_i x_k)\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} \right. \\ & \left. - \frac{1}{c}\frac{\partial \Psi^*_\sigma}{\partial t}(\alpha_k x_i - \alpha_i x_k)\Psi_\sigma\right] d\tau. \end{aligned} \tag{47}$$

Remplaçons dans (47) les dérivées par rapport au temps des Ψ_σ et Ψ^*_σ par les valeurs tirées des équations (31) et intégrons par portion (avec toujours l'hypothèse que les Ψ_σ sont nulles aux limites de V), il vient

$$M'_{ik} = \underbrace{\int_V -\frac{h}{4\pi i}\left[\Psi^*_\sigma x_i \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_k} + \dots\right] d\tau}_{M_{ik}} + \underbrace{\int_V \Psi^*_\sigma \frac{h}{4\pi} i\alpha_i\alpha_k \Psi_\sigma\, d\tau}_{S_{ik}}. \tag{48}$$

On voit donc que, si l'on considère la quantité M'_{ik} comme étant le moment total de l'impulsion (ce qui est justifié par le fait que M'_{ik} est une constante du mouvement), ce moment total se décompose en un moment *orbital* M_{ik} et un moment *propre* S_{ik} qui est le spin. La densité

de spin est donc un vecteur d'espace $\vec{\sigma}$ de composantes

$$(49) \qquad \sigma_x = \frac{h}{4\pi}\Psi_\sigma^* i\alpha_2\alpha_3\Psi_\sigma; \qquad \sigma_y = \frac{h}{4\pi}\Psi_\sigma^* i\alpha_3\alpha_1\Psi_\sigma; \qquad \sigma_z = \frac{h}{4\pi}\Psi_\sigma^* i\alpha_1\alpha_2\Psi_\sigma.$$

On montre en théorie de Dirac, que l'on peut adjoindre à ces trois grandeurs la grandeur

$$(50) \qquad \sigma_4 = -ic\frac{h}{4\pi}\Psi_\sigma^* i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Psi_\sigma,$$

de façon que σ et σ_4 soient les quatre composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps. On montre aussi que pour une onde plane monochromatique, on a

$$(51) \qquad \sigma_4 = |\vec{\sigma}|\frac{v}{c}.$$

Le spin de l'électron est donc une grandeur dont les composantes rectangulaires correspondent aux opérateurs

$$(52) \qquad S_x = \frac{h}{4\pi}i\alpha_2\alpha_3, \qquad S_y = \frac{h}{4\pi}i\alpha_3\alpha_1 \qquad S_z = \frac{h}{4\pi}i\alpha_1\alpha_2.$$

Le spin de l'électron a donc pour valeur $\frac{h}{4\pi}$; l'électron est un corpuscule de spin $1/2$ en unité $\frac{h}{2\pi}$ et les équations paraissent s'appliquer à tous les corpuscules de spin $1/2$ (protons, neutrons).

6. **Remarque importante sur le formalisme précédent.** — Dans notre schéma lagrangien, nous avons, avec la plupart des auteurs, adopté pour la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ une expression réelle de la forme

$$(53) \qquad \mathcal{L} = \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^*}{2}.$$

Le formalisme qui en est résulté nous a conduit, pour la densité de valeur moyenne d'une grandeur A, à des expressions $\rho(\overline{A})$ de la forme

$$(54) \qquad \rho(\overline{A}) = \frac{1}{2}[\Psi_\sigma^* A\Psi_\sigma + \Psi_\sigma A^*\Psi_\sigma^*].$$

Or, les principes généraux de la Mécanique ondulatoire nous conduiraient plutôt (*voir* page 9) à adopter pour $\rho(\overline{A})$ l'expression

$$(55) \qquad \rho(\overline{A}) = \Psi_\sigma^* A\Psi_\sigma,$$

qui correspond au choix $\mathcal{L} = \mathfrak{L}$ au lieu du choix (53).

Si l'opérateur A opère seulement sur les indices des Ψ_σ (comme les opérateurs α de Dirac), les définitions (54) et (55) se confondent, car $\Psi_\sigma^* A \Psi_\sigma$ est réel en vertu de l'hermiticité de A. Si l'opérateur A contient des dérivées par rapport à x, y, z, l'expression (55) peut être complexe et différer de (54), mais les expressions (54) et (55) restent *intégralement équivalentes*, c'est-à-dire donnent la même valeur si on les intègre dans V comme le montre encore l'hermiticité de A. Puisqu'en Mécanique ondulatoire seules les intégrales représentant les valeurs moyennes ont un sens physique bien défini, on peut considérer dans tous les cas les expressions (54) et (55) comme équivalentes, et il est indifférent de choisir l'une ou l'autre.

Mais cette conclusion n'est exacte qu'en Mécanique ondulatoire non superquantifiée et cesse de l'être en Mécanique ondulatoire superquantifiée, parce qu'alors le symbole Ψ_σ^* ne désigne plus la quantité complexe conjuguée (au sens usuel du mot) de Ψ_σ. Il est alors nécessaire de choisir entre les expressions (54) et (55), et nous verrons plus loin (Chap. IX, § 4) l'importance que ce choix peut présenter en théorie quantique des champs.

CHAPITRE III.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 1.

---

1. Schéma lagrangien de la Mécanique ondulatoire de la particule de spin 1 en l'absence d'interactions. — Nous avons développé dans d'autres Ouvrages (¹) une théorie de la particule de spin maximum 1, particule pouvant avoir les spins 0 ou 1, en considérant la fusion de deux particules de spin 1/2 dont les spins peuvent s'ajouter ou se retrancher. Le développement de cette théorie exige l'introduction d'un Ψ à *seize* composantes que nous désignerons par $\Psi_{\sigma\tau}$, les indices σ et τ pouvant prendre l'un et l'autre les valeurs 1, 2, 3, 4.

Pour former les combinaisons linéaires des $\Psi_{\sigma\tau}$ dont nous aurons besoin, il nous sera commode d'utiliser deux séries de 4 matrices à 16 lignes et 16 colonnes que nous définirons à partir des matières α_r de Dirac par les formules

$$(1)\qquad (\mathcal{A}_r)_{\lambda\mu,\nu\rho} = (\alpha_r)_{\lambda\nu}\,\delta_{\mu\rho}, \qquad (\mathcal{B}_r)_{\lambda\mu,\nu\rho} = -(-1)^r(\alpha_r)_{\mu\rho}\,\delta_{\lambda\nu},$$

avec $r = 1, 2, 3, 4$ et $\lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$.

En vertu des propriétés des matrices α de Dirac, les matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seront hermitiennes et l'on aura de plus

$$(2)\qquad \mathcal{A}_r\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_s\mathcal{A}_r = 1 . 2\,\delta_{rs}, \qquad \mathcal{B}_r\mathcal{B}_s + \mathcal{B}_s\mathcal{B}_r = 1 . 2\,\delta_{rs}, \qquad \mathcal{A}_r\mathcal{B}_s - \mathcal{A}_s\mathcal{B}_r = 0,$$

où 1 représente la matrice unité à 16 lignes et 16 colonnes. Le symbole $\mathcal{A}_r\Psi_{\sigma\tau}$ représentera la combinaison linéaire suivante des $\Psi_{\mu\nu}$

$$(3)\qquad \mathcal{A}_r\Psi_{\sigma\tau} = \sum_{1}^{4}{}_{\mu\nu}(\mathcal{A}_r)_{\sigma\tau,\mu\nu}\Psi_{\mu\nu},$$

et de même pour $\mathcal{B}_r\Psi_{\sigma\tau}$.

(¹) Voir ***Nouvelle théorie de la Lumière*** et ***Théorie générale des particules à spin***, déjà citées.

Ceci posé, par analogie avec le cas de l'électron, nous adopterons ici comme fonction de Lagrange

$$(4)\quad \mathcal{L} = \frac{hc}{4\pi i}\sum_{\sigma\tau}^{4}{}_{1}\Psi^{*}_{\sigma\tau}\times\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{A}_4+\mathfrak{B}_4}{2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1}{2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2}{2} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_3+\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3}{2} - ik_0\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\right)\Psi_{\sigma\tau} + \text{conj.},$$

avec

$$(5)\qquad k_0 = \frac{2\pi}{h}\mu_0 c,$$

μ_0 étant la masse propre de la particule considérée.

D'après les formules (9) du précédent chapitre, on trouve comme équations de Lagrange

$$(6)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{A}_4+\mathfrak{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2}{2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_3+\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3}{2} + ik_0\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\right]\Psi_{\sigma\tau}$$

et les équations conjuguées. Ces équations, qui ont pour conséquence $\mathcal{L} = 0$, n'ont pas tout à fait la forme canonique habituelle, à cause de la présence de l'opérateur $\frac{\mathfrak{A}_4+\mathfrak{B}_4}{2}$ au premier membre. Néanmoins, nous définirons l'opérateur hamiltonien en posant

$$(7)\qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{A}_4+\mathfrak{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = \mathrm{H}\Psi_{\sigma\tau},$$

avec

$$(8)\quad \mathrm{H} = \frac{hc}{2\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_1}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2+\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_2}{2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3+\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_3}{2} + ik_0\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\right].$$

Nous verrons plus loin que c'est bien cet opérateur qui intervient dans la définition de la densité de valeur moyenne pour l'énergie du photon.

Les équations (6) sont au nombre de seize, correspondant aux valeurs 1, 2, 3, 4 de σ et de τ. De ce groupe de 16 équations, on peut

déduire un autre groupe de 16 équations en appliquant aux deux membres de (6) l'opération $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}$. On obtient ainsi

$$(9)\quad ik_0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\tau\sigma} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_4\mathcal{B}_1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathcal{A}_4\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_4\mathcal{B}_2}{2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathcal{A}_4\mathcal{A}_3-\mathcal{B}_4\mathcal{B}_3}{2}\right]\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau}.$$

Si nous introduisons maintenant à droite la valeur de $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau}$ tirée de (6), nous constaterons que tous les termes s'annulent, sauf ceux en k_0, et il viendra finalement le groupe de 16 équations suivant :

$$(6')\quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2-\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2}{2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3-\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3}{2}\right]\Psi_{\tau\sigma}.$$

Nous avons ainsi obtenu l'ensemble des 32 équations fondamentales (6) et (6') de la particule de spin maximum 1 auxquelles correspondent naturellement 32 équations conjuguées.

Il importe de remarquer que le passage de (6) à (6') suppose essentiellement que k_0, et par suite μ_0, sont différents de zéro.

En combinant par addition et soustraction les équations (6) et (6'), puis en multipliant par $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{B}_4$ les équations obtenues, on peut écrire les équations de la particule de spin maximum 1 sous la forme

$$(10)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_1+\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}_2+\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_3+ik_0\mathcal{A}_4\right)\Psi_{\sigma\tau},$$

$$(10')\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{B}_1+\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{B}_2+\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{B}_3+ik_0\mathcal{B}_4\right)\Psi_{\sigma\tau}$$

avec $\sigma, \tau = 1, 2, 3, 4$.

Par addition et soustraction de (10) et (10'), on peut encore écrire

$$(E)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2}{2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathcal{A}_3+\mathcal{B}_3}{2}+ik_0\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right)\Psi_{\sigma\tau},$$

$$(C)\quad 0 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_2}{2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathcal{A}_3-\mathcal{B}_3}{2}+ik_0\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)\Psi_{\sigma\tau}.$$

Les équations (E) sont des *équations d'évolution* qui permettent en principe de déterminer les valeurs des $\Psi_{\sigma\tau}$ à un instant quelconque si l'on connaît leurs valeurs à un instant initial. Les équations (C) sont

des *équations de condition* que les $\Psi_{\sigma\tau}$ doivent satisfaire à chaque instant.

On démontre aisément, par exemple en itérant les équations (10) et (10′) et en tenant compte des relations (2), que l'on a pour *chaque* $\Psi_{\sigma\tau}$,

$$\square \Psi_{\sigma\tau} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi_{\sigma\tau}}{\partial t^2} - \Delta \Psi_{\sigma\tau} = k_0^2 \Psi_{\sigma\tau}, \tag{11}$$

équation qui définit la propagation des $\Psi_{\sigma\tau}$ et montre que, si k_0^2 est nul ou négligeable, cette propagation s'effectue avec la vitesse c.

2. Le quadrivecteur densité-flux. — La formule (13) du chapitre précédent et l'expression (4) de $\mathcal{L}$ nous donnent

$$f_i = c\Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_i}{2}\Psi_{\sigma\tau}, \qquad \rho = \frac{f_4}{ic} = \Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau}. \tag{12}$$

D'après le mode même de formation de ce quadrivecteur, nous savons que l'équation de continuité

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{f} = 0 \tag{13}$$

est vérifiée.

La forme de la densité ρ appelle quelques remarques bien connues de ceux qui ont pratiqué la théorie du photon et la théorie générale des particules à spin. Le fait fondamental est que la densité ρ n'est pas ici, comme en théorie de Dirac, une quantité définie positive (c'est-à-dire toujours positive ou nulle, mais jamais négative). Elle peut être négative et même, comme nous le verrons, pour une onde monochromatique à énergie négative, elle l'est en tout point. Lorsque $\int_V \rho\, d\tau$ est négatif, on ne peut évidemment pas normaliser la fonction Ψ en posant $\int_V \rho\, d\tau = 1$. Nous verrons d'ailleurs que pour une onde à énergie négative, la difficulté disparaît si l'on norme *en énergie* en posant $\int_V \rho W d\tau = h\nu$ car, pour une onde à énergie négative, ρW est positif parce que ρ et W sont tous deux négatifs.

Dans le cas général d'une onde Ψ quelconque, des difficultés analogues à la précédente pourront se présenter chaque fois que dans la composition spectrale de l'onde Ψ figureront des ondes à énergie négative. Mais il y a plus : même pour des ondes Ψ formées uniquement par une superposition d'ondes planes à énergies positives, il peut se faire

qu'en certains points ρ soit négatif. Néanmoins la formule de normalisation $\int_V \rho \, d\tau = 1$ sera alors encore applicable car, l'intégration annulant l'effet des interférences locales et ne laissant subsister que la somme des contributions dues aux ondes planes considérées isolément, l'intégrale $\int_V \rho \, d\tau$ sera toujours positive. Néanmoins, même alors, la grandeur ρ ne peut être considérée comme donnant la probabilité de présence de la particule en chaque point, puisqu'elle n'est pas nécessairement positive. Nous aurons l'occasion de revenir plusieurs fois sur les propriétés de la densité ρ.

3. Le tenseur impulsion-énergie. — Le schéma lagrangien général nous a conduit à définir un tenseur impulsion-énergie non symétrique par la formule (10) du précédent chapitre.

En l'appliquant, compte tenu de la relation $\mathcal{L} = 0$, nous trouvons

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{ik} &= \frac{hc}{4\pi i}\left[\Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_i}{2}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial x_k} + \frac{\partial\Psi^*_{\sigma\tau}}{\partial x_k}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_i}{2}\Psi_{\sigma\tau}\right], \\ T_{i4} &= \frac{hc}{4\pi}\left[\Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_i}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} + \text{conj.}\right], \\ T_{4i} &= -\frac{hc}{4\pi}\left[\Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial x_i} + \text{conj.}\right], \\ T_{44} &= w = -\frac{hc}{2\pi i}\Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = -\Psi^*_{\sigma\tau} H \Psi_{\sigma\tau}. \end{aligned} \right.$$

Nous pourrions mettre d'ailleurs l'expression de T_{ik} sous une forme plus élégante donnant les 16 T_{ik} en une seule formule, mais, pour développer les calculs, nous serions toujours amenés à revenir aux formules (14). Nous savons que le tenseur satisfait aux relations de conservation $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = 0$.

Nous connaissons le sens physique des T_{ik}. On peut le vérifier aisément dans le cas simple des ondes planes monochromatiques. Par exemple, pour T_{44} comme le $\Psi_{\sigma\tau}$ d'une onde plane monochromatique est tel que

$$\frac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h} W \Psi_{\sigma\tau},$$

W étant l'énergie de la particule, on trouve

$$(15) \qquad T_{44} = -W\Psi^*_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = -\rho W = -w.$$

Nous pouvons, si nous le désirons, remplacer le tenseur non symétrique T_{ik} par le tenseur symétrique $T'_{ik} = \frac{T_{ik} + T_{ki}}{2}$. De plus, comme les densités ne sont définies en Mécanique ondulatoire qu'à une divergence d'espace près, nous pourrions encore remplacer le tenseur T'_{ik} par un autre tenseur qui lui soit équivalent intégralement.

On peut démontrer qu'il en est ainsi pour le tenseur suivant

$$(16)\quad \begin{cases} m_{ik} = m_{ki} = \mu_0 c^2 \Psi^*_{\sigma\tau} \frac{\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_k + \mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_k}{2} \Psi_{\sigma\tau} & (i, k = 1, 2, 3), \\ m_{i4} = m_{4i} = \quad i\mu_0 c^2 \Psi^*_{\sigma\tau} \frac{\mathfrak{A}_i + \mathfrak{B}_i}{2} \Psi_{\sigma\tau} & (i, = 1, 2, 3), \\ m_{44} = -\mu_0 c^2 \Psi^*_{\sigma\tau} \Psi_{\sigma\tau}. & \end{cases}$$

Ce tenseur *symétrique* d'impulsion-énergie, le tenseur maxwellien, a une grande importance en théorie du photon, où il vient se confondre avec le terme classique de Maxwell à des termes en μ_0^2 près. Dans la théorie classique de l'électromagnétisme, on a considéré à peu près exclusivement ce tenseur énergie-impulsion dans le vide et cette circonstance a fait méconnaître l'existence du tenseur symétrique T'_{ik} qui lui est intégralement équivalent et du tenseur non symétrique T_{ik} dont T'_{ik} est la forme symétrisée. C'est l'un des avantages de la Mécanique ondulatoire du photon de mettre bien en évidence l'existence de ces divers tenseurs.

4. Définition du spin. — Nous introduirons le spin comme nous l'avons fait précédemment en théorie de Direc. Le moment d'impulsion

$$(17)\qquad M_{ik} = \frac{1}{ic} \int_V [x_i T_{4k} - x_k T_{4i}]\, d\tau \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

n'est pas constant au cours du temps à cause de la non-symétrie de T_{ik}. Au contraire, le tenseur

$$(18)\qquad M'_{ik} = \frac{1}{ic} \int_V [x_i T'_{4k} - x_k T'_{4i}]\, d\tau \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

reste constant au cours du temps. Substituant dans les expressions de T'_{4k} et T'_{4i} les valeurs de $\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi_{\sigma\tau}}{\partial t}$ et $\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi^*_{\sigma\tau}}{\partial t}$ tirées des équations (10) et (10′) et de leurs conjuguées, on obtient après une intégration par parties

$$(19)\qquad M'_{ik} = M_{ik} + S_{ik},$$

avec

$$(20) \qquad S_{ik} = -\frac{h}{2\pi i}\int_v \Psi^*_{\sigma\tau}\,\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_i\mathcal{A}_k + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_i\mathcal{B}_k}{2}\,\Psi_{\sigma\tau}\,dv$$

pour $i, k = 1, 2, 3$. Nous sommes donc conduits à définir la densité de spin comme un vecteur d'espace $\vec{\sigma}$ dont les trois composantes rectangulaires sont

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{h}{2\pi}\Psi^*_{\sigma\tau}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{2}\,\Psi_{\sigma\tau}, \\ \sigma_y &= \frac{h}{2\pi}\Psi^*_{\sigma\tau}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1}{2}\,\Psi_{\sigma\tau}, \\ \sigma_z &= \frac{h}{2\pi}\Psi^*_{\sigma\tau}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}{2}\,\Psi_{\sigma\tau} \end{aligned} \right.$$

correspondant aux opérateurs de spin

$$(22) \qquad S_x = \frac{h}{2\pi}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{2}; \qquad S_y = \frac{h}{2\pi}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1}{2};$$
$$S_z = \frac{h}{2\pi}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}{2}.$$

Enfin si l'on considère la grandeur

$$(23) \qquad \sigma_4 = -\frac{ich}{2\pi}\Psi^*_{\sigma\tau}\,\frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{2}\,\Psi_{\sigma\tau}.$$

on peut démontrer que σ_x, σ_y, σ_z et σ_4 forment les quatre composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps.

5. Grandeurs tensorielles attachées à la particule de spin maximum 1 et état d'annihilation. — Nous avons jusqu'ici caractérisé la particule de spin maximum 1 par les seize composantes $\Psi_{\sigma\tau}$ de sa fonction d'onde. Nous allons maintenant être amenés à substituer aux $\Psi_{\sigma\tau}$, seize grandeurs ayant un caractère tensoriel et permettant d'écrire les équations de la particule sous forme tensorielle. Ces grandeurs ont notamment une grande importance en théorie du photon, car nous verrons qu'une partie d'entre elles représentent les potentiels et les champs de la théorie électromagnétique.

Pour parvenir à introduire les grandeurs tensorielles en question, nous remarquerons que les photons sont susceptibles de disparaître en abandonnant toute leur énergie et leur quantité de mouvement à des éléments matériels (électrons par exemple), et nous admettrons que toute particule de spin 1 possède cette propriété. Ceci nous a conduit à admettre qu'il

existe un *état d'annihilation* pour ces particules et à chercher à représenter cet état d'annihilation par une fonction d'onde $\Psi^{(0)}$. Il est naturel d'admettre que les composantes de cette fonction d'onde doivent être des constantes indépendantes de $xyzt$ et que la forme de $\Psi^{(0)}$ doit rester invariante pour une transformation de Lorentz quand on applique aux composantes $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$ la transformation que subissent d'une façon générale les composantes $\Psi_{\sigma\tau}$ lors d'une telle transformation de Lorentz. On trouve ainsi (nous en donnerons plus loin une justification) que l'on doit poser

$$(24) \qquad \Psi^{(0)}_{11} = -1, \qquad \Psi^{(0)}_{22} = -1, \qquad \Psi^{(0)}_{33} = +1, \qquad \Psi^{(0)}_{44} = +1,$$

tous les autres $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$ étant nuls. Si donc on considère les $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$ comme les éléments d'une matrice à 4 lignes et 4 colonnes, cette matrice coïncide avec la matrice α_4 définie pour les équations (28) du précédent chapitre, et nous pouvons écrire symboliquement

$$(25) \qquad \Psi^{(0)} = \alpha_4.$$

Mais ici se présente une grave difficulté : la fonction $\Psi^{(0)}$ ainsi définie n'est pas solution des équations de la particule. Si, en effet, nous nous reportons aux équations (6) et (6′), nous voyons que les équations (6′) sont bien satisfaites par les valeurs (25) des $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$, mais qu'il n'en est pas de même des équations (6) en raison de la présence du terme en k_0. On pourrait, il est vrai, quand il s'agit des photons, supposer μ_0 et par suite k_0 nuls : c'est là une question que nous discuterons. Mais il est nécessaire de parvenir à une définition des grandeurs tensorielles qui soit valable pour toute particule de spin 1, en particulier dans le cas des mésons où ces grandeurs jouent un rôle important : il faut donc absolument, à notre point de vue, obtenir une fonction $\Psi^{(0)}$ qui soit une solution des équations de la particule de spin 1, même quand $\mu_0 \neq 0$.

Pour lever cette difficulté, nous pouvons employer l'artifice suivant (qui peut avoir un sens physique profond). Nous admettrons que les équations de propagation devraient en réalité être écrites non pas dans l'espace-temps à quatre dimensions $xyzt$, mais dans un espace à cinq dimensions x_0, x, y, z, t, la cinquième dimension correspondant à la coordonnée x_0 échappant à notre perception. De plus, nous admettrons que les composantes $\Psi_{\sigma\tau}$ d'une fonction d'onde représentant un état non annihilé ne dépendent de x_0 que par un facteur de phase de la forme $e^{ik_0 x_0}$.

On peut alors remplacer les équations (6) par les suivantes :

$$(26) \qquad \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1}{2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2}{2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3+\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3}{2}+\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\frac{\partial}{\partial x_0}\right]\Psi_{\sigma\tau},$$

en conservant les équations (6'). Les fonctions d'onde des états non annihilés, étant de la forme

$$\Psi_{\sigma\tau} = f_{\sigma\tau}(x, y, z, t)\, e^{ik_0 x_0}$$

et satisfaisant à (26), satisferont aussi à (6), mais, de plus, il est évident que les $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = (\alpha_4)_{\sigma\tau}$ étant indépendants de $xyzt$ *et de* x_0 satisferont également à (26), de sorte que le système des équations (26) et (6'), équivalent au système (6)-(6') pour les fonctions d'onde représentant des états non annihilés, admet en plus la solution $\Psi^{(0)}$. Ainsi se trouve levée la difficulté signalée plus haut.

Nous verrons d'ailleurs plus tard que l'introduction de la variable x_0 lève également d'autres difficultés relatives à la fonction $\Psi^{(0)}$.

6. **Définition des grandeurs tensorielles comme liées à des transitions d'annihilation.** — L'interaction entre un photon et un électron a lieu au moment où le photon s'annihile. Il est donc naturel d'admettre que les grandeurs électromagnétiques traduisant l'action de la lumière sur la matière sont liées à la transition quantique qui fait passer le photon de son état initial à l'état d'annihilation et doivent être définies en fonction de cette transition. Généralisant cette idée, nous admettrons que les grandeurs tensorielles associées à toute particule de spin 1 doivent être définies de cette façon.

Ces idées nous conduisent à penser que les grandeurs tensorielles doivent être définies comme des densités d'éléments de matrices correspondant de l'état initial non annihilé Ψ à l'état final d'annihilation $\Psi^{(0)}$. Il faut, en effet, que ces grandeurs soient des *grandeurs de champ*, c'est-à-dire des fonctions de x, y, z, t et, dans la théorie quantique, les seules grandeurs de ce type associées à une transition déterminée, sont les densités d'éléments de matrice.

Or, il ressort des exemples de densités obtenus au paragraphe précédent lors du calcul du quadrivecteur densité-flux, du tenseur impulsion-énergie et des densités de spin, que les densités ont ici la forme

canonique

$$\Psi^*_{\sigma\tau} \frac{\mathcal{B}_4 F_1 + \mathcal{A}_4 F_2}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \tag{27}$$

où F_1 et F_2 sont des opérateurs de même forme, mais agissant seulement l'un sur le premier indice de $\Psi_{\sigma\tau}$, l'autre sur le second. Par exemple, pour la composante z du spin, on a

$$F_1 = i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \qquad \text{et} \qquad F_2 = i\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2, \; \ldots .$$

Nous chercherons donc à définir seize grandeurs de la forme (27) grâce à seize choix différents des opérateurs F.

Combinons, à cet effet, par multiplication, les seize matrices $\mathcal{A}_r$ et la matrice 1 à 16 lignes et 16 colonnes. Nous pourrons ainsi obtenir seize combinaisons indépendantes susceptibles de jouer le rôle de F_1, savoir :

$$1,\ \mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2,\ \mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_4,\ i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4,\ i\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4,\ i\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4,\ i\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4,\ i\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4,$$
$$i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4,\ i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2,\ i\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3,\ i\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1,\ i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3,\ \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4,$$

et en partant des $\mathcal{B}_r$ on trouvera de même seize formes possibles indépendantes pour F_2.

De cette façon, on est conduit à former, sous forme de densités d'éléments de matrice, les seize grandeurs tensorielles non nulles du type (27) dont voici la liste :

1° Les quatre composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps

$$\left\{\begin{aligned}
A_1 &= A_x = -K\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_4\mathcal{B}_1}{2}\Psi_{\sigma\tau},\\
A_2 &= A_y = -K\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_4\mathcal{B}_2}{2}\Psi_{\sigma\tau},\\
A_3 &= A_z = -K\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4\mathcal{B}_3}{2}\Psi_{\sigma\tau},\\
A_4 &= iV = iK\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_4 - \mathcal{A}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau}.
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Dans ces formules, K désigne une constante que nous choisirons égale à

$$K = \frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0}}, \tag{29}$$

de façon à pouvoir rejoindre dans le cas du photon les formules classiques de l'électromagnétisme, comme nous le montrerons plus loin. Dans le cas du photon, A_x, A_y, A_z seront les composantes du potentiel vecteur et V sera le potentiel scalaire.

2° Les six composantes indépendantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2

$$
(30)\quad
\begin{cases}
F_{23} = H_x = -iKk_0 \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4 - i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
F_{31} = H_y = -iKk_0 \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4 - i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
F_{12} = H_z = -iKk_0 \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4 - i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
F_{14} = -iE_x = -iKk_0 \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4 - i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
F_{24} = -iE_y = -iKk_0 \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4 - i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
F_{34} = -iE_z = -iKk_0 \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4 - i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}.
\end{cases}
$$

Dans le cas du photon, H_x, ..., E_z seront, on le devine, les composantes rectangulaires du champ magnétique et du champ électrique.

3° Un invariant I_1

$$
(31)\quad I_1 = \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau} = \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \mathcal{A}_4\mathcal{B}_4 \Psi_{\sigma\tau}.
$$

4° Un invariant I_2 (ou plutôt un tenseur complètement antisymétrique de rang 4)

$$
(32)\quad I_2 = \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \frac{\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}.
$$

5° Un quadrivecteur (ou plus exactement un tenseur complètement antisymétrique de rang 3)

$$
(33)\quad
\begin{cases}
U_x = U_1 = -\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{2} \Psi_{\sigma\tau}; \\
U_y = U_2 = -\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
U_z = U_3 = -\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}{2} \Psi_{\sigma\tau}, \\
U_4 = iU_t = i\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau} \dfrac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{2} \Psi_{\sigma\tau}.
\end{cases}
$$

Les grandeurs I_1, I_2, U_1, ..., U_4 n'ont pas d'analogues dans la théorie électromagnétique. On remarquera que les grandeurs *Maxwelliennes* (28) et (30) sont formées par des combinaisons antisymétriques où figure le signe —, tandis que les grandeurs *non Maxwelliennes* (31), (32) et (33) sont formées par des combinaisons

symétriques où figure le signe $+$. Les combinaisons symétriques des opérateurs figurant dans (28) et (30), ainsi que les combinaisons antisymétriques des opérateurs figurant dans (31), (32) et (33) donneraient, d'après la définition des $\mathfrak{A}_r$, des $\mathfrak{B}_r$ et des $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$, des grandeurs identiquement nulles.

7. **Équations tensorielles de la particule de spin maximum 1.** — Les 32 équations (6) et (6′) de la particule de spin maximum 1 peuvent être transformées en équations de forme tensorielle si on les combine linéairement de façon à faire apparaître les 16 grandeurs tensorielles définies au paragraphe précédent. Le calcul est particulièrement facile en partant des équations (10) et (10′) équivalentes aux équations (6) et (6′). En effectuant ces combinaisons linéaires, on s'aperçoit des deux faits suivants : 1° l'une des 32 équations obtenues se réduit à l'identité $0 \equiv 0$, de sorte que l'on n'obtient réellement que 31 équations distinctes; 2° les 31 équations distinctes obtenues se décomposent en un groupe de 15 équations ne contenant que les 10 grandeurs maxwelliennes $A_x, \ldots, E_z$ (équations maxwelliennes) et en un autre groupe de 16 équations ne contenant que les 6 grandeurs non maxwelliennes $I_1, \ldots, U_4$ (équations non maxwelliennes).

Voici quels sont ces deux groupes d'équations.

a. Équations maxwelliennes. — En notations d'Univers, elles s'écrivent :

$$(34)\quad \begin{cases} F_{ik} = \dfrac{\partial A_k}{\partial x_i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4); \qquad \dfrac{\partial F_{ki}}{\partial x_i} = -k_0^2 A_k \quad (k = 1, 2, 3, 4); \\[2ex] \dfrac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \dfrac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0 \\[2ex] (i, k, l \text{ permutation } \textit{paire} \text{ des indices } 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

On remarquera d'ailleurs que les équations de la seconde ligne sont des conséquences de celles de la première ligne.

Avec les notations vectorielles employées en théorie électromagnétique, les équations (34) s'écrivent :

$$(35)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V, & \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\[2ex] -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{E}, & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{A}, & \operatorname{div} \mathbf{E} = -k_0^2 V, \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont presque identiques à celles de la théorie électromagnétique usuelle (y compris la relation de Lorentz entre les potentiels). Elles n'en diffèrent, en effet, que par les termes en k_0^2, c'est-à-dire par des termes de l'ordre du carré de la masse propre μ_0 de la particule. On obtiendra donc la théorie de la lumière en supposant que la masse propre μ_0 du photon soit nulle ou du moins si petite que les termes en μ_0^2 soient négligeables.

Des équations maxwelliennes précédentes, on tire aisément l'équation du second ordre

$$\square F + k_0^2 F = 0, \tag{36}$$

valable pour l'une quelconque des 10 grandeurs maxwelliennes $A_x, \ldots, E_z$. Il en résulte que chacune de ces grandeurs peut se propager par ondes planes monochromatiques de la forme $a\, e^{i[kct - \mathbf{k}r]}$ avec la relation

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 + k_0^2, \tag{37}$$

qui assure la vérification de l'équation (36). La relation (37) n'est autre que la relation admise par la théorie de relativité entre l'énergie et l'impulsion d'une particule libre, comme nous le verrons au chapitre suivant. Si μ_0^2 est nulle ou négligeable, on a $\square F = 0$ et $k = |\mathbf{k}|$: la propagation des ondes s'effectue alors avec la vitesse c et l'on voit que ce cas limite correspond à la théorie électromagnétique classique.

b. Équations non maxwelliennes. — Le groupe des seize équations non maxwelliennes se décompose lui-même en deux sous-groupes.

b_1. Un premier sous-groupe comprend cinq équations ne contenant que la grandeur I_1. Ce sont :

$$\mu_0 I_1 = 0, \qquad \frac{\partial I_1}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{38}$$

On voit donc que l'invariant I_1 est nécessairement une constante dans l'espace-temps et qu'il doit même être nul si $\mu_0 \neq 0$.

Néanmoins nous devons faire ici une remarque importante. Si l'on prend $\Psi = \Psi^{(0)}$, de telle sorte que $I_1 = \Psi^{(0)}_{\sigma\tau} \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4 \Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$, l'équation $\mu_0 I_1 = 0$, qui doit être encore exacte si l'on admet les équations (6), cesse de l'être si l'on remplace les équations (6) par les équations (26) comme nous avons proposé de le faire.

En effet, multipliant (26) par $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$, on obtient non pas

$$k_0 \Psi^{(0)}_{\sigma\tau} \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4 \Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = 0, \tag{39}$$

comme ce serait le cas avec (6), mais bien une identité $0 \equiv 0$ $\left(\text{parce que } \frac{\partial \Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}}{\partial x_0} = 0\right)$.

Cette remarque va d'ailleurs nous permettre de vérifier l'invariance de $\Psi'^{(0)}$ comme nous l'avions promis. En effet, formons avec $\Psi' = \Psi'^{(0)} = \alpha_4$ les seize grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes : nous constaterons que toutes ces grandeurs sont nulles sauf I_1 qui, nous venons de le montrer, ne l'est pas nécessairement si l'on emploie les équations (26) et qui, en fait, est alors égal à 4 comme on le calcule aisément. L'onde $\Psi'^{(0)}$ exprimée à l'aide des grandeurs tensorielles se réduit donc à l'invariant I_1, et ainsi son caractère d'invariance est bien mis en lumière.

Le fait que l'invariant I_1 correspondant à $\Psi'^{(0)}$ est égal à 4 et non à 0, nous montre que l'équation $\mu_0 I_1 = 0$ n'est pas vérifiée, ce qui veut dire que $\Psi'^{(0)}$ n'est pas solution de (6); mais il l'est, par contre, des équations (26). On peut donc dire que la substitution de (26) à (6) rend la théorie beaucoup plus cohérente et satisfaisante.

b_2. Un autre groupe d'équations non maxwelliennes est formé par 11 équations contenant l'invariant I_2 et le quadrivecteur **U**. Ce sont :

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial I_2}{\partial x_k} = i k_0 U_k & (k = 1, 2, 3, 4), \\ \frac{\partial U_k}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_k} & (i, k = 1, 2, 3, 4), \\ \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = i k_0 I_2. & \end{array}\right.$$

On remarque que la deuxième équation résulte de la première.

Nous étudierons ultérieurement la signification de ce groupe d'équations et nous verrons qu'il représente une particule de spin 0, alors que les équations maxwelliennes représentent une particule de spin 1.

Naturellement les six grandeurs non maxwelliennes I_1, I_2, **U** satisfont à l'équation du second ordre

$$(41)\quad \square F + k_0^2 F = 0.$$

Les grandeurs tensorielles maxwelliennes et non maxwelliennes s'expriment par des fonctions bilinéaires des $\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}$ et des $\Psi_{\sigma\tau}$. Comme les $\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}$ sont des constantes, on peut exprimer les $\Psi_{\sigma\tau}$ en fonction

Ces équations sont presque identiques à celles de la théorie électromagnétique usuelle (y compris la relation de Lorentz entre les potentiels). Elles n'en diffèrent, en effet, que par les termes en k_0^2, c'est-à-dire par des termes de l'ordre du carré de la masse propre μ_0 de la particule. On obtiendra donc la théorie de la lumière en supposant que la masse propre μ_0 du photon soit nulle ou du moins si petite que les termes en μ_0^2 soient négligeables.

Des équations maxwelliennes précédentes, on tire aisément l'équation du second ordre

$$\square F + k_0^2 F = 0, \tag{36}$$

valable pour l'une quelconque des 10 grandeurs maxwelliennes $A_x, \ldots, E_z$. Il en résulte que chacune de ces grandeurs peut se propager par ondes planes monochromatiques de la forme $a\, e^{i[kct-\mathbf{k}\mathbf{r}]}$ avec la relation

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 + k_0^2, \tag{37}$$

qui assure la vérification de l'équation (36). La relation (37) n'est autre que la relation admise par la théorie de relativité entre l'énergie et l'impulsion d'une particule libre, comme nous le verrons au chapitre suivant. Si μ_0^2 est nulle ou négligeable, on a $\square F = 0$ et $k = |\mathbf{k}|$: la propagation des ondes s'effectue alors avec la vitesse c et l'on voit que ce cas limite correspond à la théorie électromagnétique classique.

b. Équations non maxwelliennes. — Le groupe des seize équations non maxwelliennes se décompose lui-même en deux sous-groupes.

b_1. Un premier sous-groupe comprend cinq équations ne contenant que la grandeur I_1. Ce sont :

$$\mu_0 I_1 = 0, \qquad \frac{\partial I_1}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{38}$$

On voit donc que l'invariant I_1 est nécessairement une constante dans l'espace-temps et qu'il doit même être nul si $\mu_0 \neq 0$.

Néanmoins nous devons faire ici une remarque importante. Si l'on prend $\Psi = \Psi^{(0)}$, de telle sorte que $I_1 = \Psi^{(0)*}_{\sigma\tau} \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4 \Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$, l'équation $\mu_0 I_1 = 0$, qui doit être encore exacte si l'on admet les équations (6), cesse de l'être si l'on remplace les équations (6) par les équations (26) comme nous avons proposé de le faire.

En effet, multipliant (26) par $\Psi^{(0)*}_{\sigma\tau}$, on obtient non pas

$$k_0 \Psi^{(0)*}_{\sigma\tau} \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4 \Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = 0, \tag{39}$$

CHAPITRE IV.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 1.

(*Suite.*)

---

1. Schéma lagrangien de la Mécanique ondulatoire de la particule de spin maximum 1 avec emploi des grandeurs tensorielles. — Puisque nous savons exprimer les grandeurs tensorielles en fonction des $\Psi_{\sigma\tau}$, nous pouvons exprimer la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ à l'aide de ces grandeurs $\left(\text{en admettant toujours pour K la valeur } \frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0}}\right)$. On trouve

$$(1)\quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}A_j^*\left(\frac{\partial F_{jk}}{\partial x_k} + k_0^2 A_j\right) + \frac{1}{4}F_{jk}^*\left(F_{jk} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_k}\right)$$
$$+ \frac{1}{8}\mu_0 c^2\left[I_1^* I_1 - I_2^*\left(I_2 - \frac{i}{k_0}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right)\right] + U_j^*\left(U_j + \frac{i}{k_0}\frac{\partial I_2}{\partial x_j}\right) + \text{conj.}$$

Soit alors Q l'une quelconque des 16 grandeurs tensorielles. Les équations de Lagrange sont ici

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x_l}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial Q^*}{\partial x_l}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^*}.$$

Elles nous donnent

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_{jk}}{\partial x_k} = -k_0^2 A_j, \qquad F_{jk} = \dfrac{\partial A_k}{\partial x_j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x_k}, \qquad \mu_0 I_1 = 0; \\ \dfrac{\partial U_j}{\partial x_j} = -ik_0 I_2, \qquad \dfrac{\partial I_2}{\partial x_k} = ik_0 U_k, \end{cases}$$

ainsi que les équations conjuguées.

Or nous avons déjà remarqué plus haut que des équations (3) on peut déduire toutes les autres équations tensorielles : les 31 équations tensorielles découlent donc bien de ce schéma lagrangien. On notera d'ailleurs que les équations ont pour conséquence $\mathcal{L} = 0$.

Compte tenu de cette dernière relation, on trouve pour le tenseur impulsion-énergie les composantes suivantes :

$$(4)\qquad \mathrm{T}_{ik} = -\sum_{Q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)} \frac{\partial Q}{\partial x_k} - \sum_{Q^*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial Q^*}{\partial x_k}\right)} \frac{\partial Q^*}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{F}^*_{ij} \frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial x_k} - \mathrm{A}^*_j \frac{\partial \mathrm{F}_{ji}}{\partial x_k}\right] + \frac{hc}{16\pi i}\left[\mathrm{I}^*_2 \frac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial x_k} + \mathrm{U}^*_i \frac{\partial \mathrm{I}_2}{\partial x_k}\right] + \text{conj.}$$

Par exemple, on aura pour T_{44},

$$(5)\qquad \mathrm{T}_{44} = \frac{1}{2c}\left[\left(\mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) - \left(\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\right] + \frac{h}{16\pi i}\left[\mathrm{I}^*_2 \frac{\partial \mathrm{U}_4}{\partial t} + \mathrm{U}^*_4 \frac{\partial \mathrm{I}_2}{\partial t}\right] + \text{conj.}$$

Pour le quadrivecteur densité-flux, on trouvera de même

$$(6)\qquad \rho = \frac{2\pi i}{h}\left[\sum_{Q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} Q - \sum_{Q^*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}^*} Q^*\right]$$

$$= \frac{2\pi}{hc}\left[\mathrm{A}^*_j \mathrm{F}_{4j} + \mathrm{F}^*_{4j} \mathrm{A}_j\right] + \frac{i}{4}\left[\mathrm{I}^*_2 \mathrm{U}_4 + \mathrm{U}^*_4 \mathrm{I}_2\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{hc}\left[(\mathbf{A}^* \mathbf{E}) - (\mathbf{E}^* \mathbf{A})\right] + \frac{i}{4}\left[\mathrm{I}^*_2 \mathrm{U}_4 + \mathrm{U}^*_4 \mathrm{I}_2\right]$$

et pour $i = 1, 2, 3$

$$(7)\qquad f_i = \frac{2\pi i}{h}\left[\sum_{Q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right)} Q - \sum_{Q^*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial Q^*}{\partial x_i}\right)} Q^*\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{h}\left[\mathrm{A}^*_j \mathrm{F}_{ij} + \mathbf{F}^*_{ji} \mathrm{A}_j\right] + \frac{i}{4}\left[\mathrm{I}^*_2 \mathrm{U}_i + \mathrm{U}^*_i \mathrm{I}_2\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{h}\left\{[\mathbf{A}^* \mathbf{H}]_i + \mathrm{V}^* \mathbf{E}_i + [\mathbf{H}^* \mathbf{A}]_i - \mathrm{V} \mathrm{E}^*_i\right\} + \frac{i}{4}\left[\mathrm{I}^*_2 \mathrm{U}_i + \mathrm{U}^*_i \mathrm{I}_2\right].$$

Si l'on fait abstraction des grandeurs non maxwelliennes, les formules précédentes coïncident avec des formules bien connues en Mécanique ondulatoire du photon.

Les équations tensorielles ont pour conséquences les relations de conservation $\frac{\partial \mathrm{T}_{ik}}{\partial x_i} = 0$ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$, comme cela résulte du schéma Lagrangien général.

Le tenseur symétrique maxwellien m, intégralement équivalent au tenseur T, ne peut pas se déduire directement de la fonction $\mathcal{L}$ de Lagrange adoptée ici, mais on peut évidemment exprimer les m_{ik} à l'aide des grandeurs tensorielles. On trouve ainsi, par exemple, pour la

partie dépendant des grandeurs maxwelliennes

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{i}\, m_{l4} = [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]_l - [\mathbf{H}^*\mathbf{E}]_l + k_0^2(\mathrm{V}^*\mathrm{A}_l + \mathrm{V}\mathrm{A}_l^*) \\ -m_{44} = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + k_0^2(|\mathrm{A}|^2 + |\mathrm{V}|^2) \end{cases}$$

et, si l'on néglige les termes en k_0^2, la parenté de ces expressions avec celles de la théorie électromagnétique est évidente.

De même, on peut exprimer les composantes du spin sous la forme

$$(9)\qquad \begin{cases} \vec{\sigma} = \dfrac{1}{2}\{[\mathbf{E}^*\mathbf{A}] - [\mathbf{A}^*\mathbf{E}] + \mathrm{V}^*\mathbf{H} + \mathbf{H}^*\mathrm{V}\} + \dfrac{ih}{8\pi}(\mathbf{U}^*\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_2^*\mathbf{U}), \\ \dfrac{\sigma_4}{i} = \dfrac{1}{c}\{(\mathbf{A}^*\mathbf{H}) + (\mathbf{H}^*\mathbf{A})\} + \dfrac{ih}{8\pi}(\mathbf{U}_l^*\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_2^*\mathbf{U}_l) \end{cases}$$

en fonction des grandeurs tensorielles.

Reprenant ici une remarque développée au Chapitre II, paragraphe 6, il convient de noter que le choix d'une fonction de Lagrange réelle de la forme $\mathcal{L} = \dfrac{\mathcal{L} + \mathcal{L}^*}{2}$ nous a conduit pour les densités de valeur moyenne à des expressions réelles telles que

$$(10)\qquad w = -\mathrm{T}_{44} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{A}^*\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) - \left(\mathbf{E}^*\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\right] + \text{conj.}\right\}$$

(dans le cas purement maxwellien), tandis que la formule générale de Mécanique ondulatoire

$$(11)\qquad \rho(\overline{\mathrm{A}}) = \Psi_{\sigma\tau}^*\,\mathrm{A}\,\Psi_{\sigma\tau},$$

conduirait à poser

$$(12)\qquad w = \frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{A}^*\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) - \left(\mathbf{E}^*\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\right].$$

Dans la théorie non superquantifiée que nous exposons en ce moment, les expressions telles que (10) et (12) sont intégralement équivalentes, comme on le voit aisément, en développant **A** et **E** en ondes planes monochromatiques et en tenant compte de ce que l'intégration fait disparaître les interférences. Mais en Mécanique ondulatoire superquantifiée, il n'y a plus équivalence entre les expressions des types (10) et (12) parce que Q* n'est plus alors la quantité complexe conjuguée (au sens usuel du mot) de Q. Nous aurons à revenir sur ce point quand nous étudierons la théorie quantique des champs.

2. Étude des ondes planes monochromatiques. — Dans toutes les formes de la Mécanique ondulatoire, l'étude des ondes planes monochromatiques est particulièrement importante parce que ces ondes correspondent aux mouvements rectilignes et uniformes.

Nous allons chercher directement les solutions des équations tensorielles qui ont la forme d'ondes planes monochromatiques. Les grandeurs tensorielles d'une telle onde plane dépendront des coordonnées d'espace et de temps par l'exponentielle

$$P = e^{i[kct-\mathbf{kr}]},$$

la correspondance entre les grandeurs mécaniques énergie W et impulsion $\mathbf{p}$ de la particule et les grandeurs k et $\mathbf{k}$ étant donnée par les relations

$$(13) \qquad k = \frac{2\pi}{hc} W, \qquad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{h} \mathbf{p}.$$

La substitution dans les équations tensorielles montre que k et $\mathbf{k}$ doivent être liées par la relation

$$(14) \qquad k^2 = |\mathbf{k}|^2 + k_0^2, \qquad \left(k_0 = \frac{2\pi}{h} \mu_0 c\right).$$

Cette relation se confond avec la relation relativiste bien connue

$$(15) \qquad \frac{W^2}{c^2} = |\mathbf{p}|^2 + \mu_0^2 c^2$$

entre l'énergie, l'impulsion et la masse propre d'une particule. Cette relation étant supposée satisfaite, on pourra trouver des solutions *ondes planes monochromatiques* pour les équations maxwelliennes et les équations non maxwelliennes.

En prenant la direction de l'onde plane pour axe des z, on obtient pour les équations maxwelliennes la solution

$$(16) \begin{cases} A_x = \frac{C_1 + C_2}{2} P, \quad A_y = \frac{C_1 - C_2}{2} iP, \quad A_z = C_3 P, \quad V = C_3 \frac{|\mathbf{k}|}{k} P, \\ E_x = -ik \frac{C_1 + C_2}{2} P, \quad E_y = k \frac{C_1 - C_2}{2} P, \quad E_z = -i \frac{k_0^2}{k} C_3 P, \\ H_x = -|\mathbf{k}| \frac{C_1 - C_2}{2} P, \quad H_y = -i|\mathbf{k}| \frac{C_1 + C_2}{2} P, \quad H_z = 0, \end{cases}$$

et pour les équations non maxwelliennes la relation

$$(17) \quad U_x = U_y = 0, \quad U_z = \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} C_4 P, \quad U_t = -\frac{k}{k_0} C_4 P, \quad I_2 = C_4 P.$$

Les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 sont arbitraires et indépendantes. On peut séparer C_1 et C_2 dans l'expression de l'onde plane maxwellienne en écrivant les formules précédentes sous la forme suivante

$$(18)\quad \begin{cases} \mathcal{D} & A_x - iA_y = C_1 P, & E_x - iE_y = -ik\,C_1 P, & H_x - iH_y = -|\mathbf{k}|\,C_1 P, \\ & A_x + iA_y = 0, & E_x + iE_y = 0, & H_x + iH_y = 0; \\ \mathcal{G} & A_x + iA_y = C_2 P, & E_x + iE_y = -ik\,C_2 P, & H_x + iH_y = |\mathbf{k}|\,C_2 P \\ & A_x - iA_y = 0, & E_x - iE_y = 0, & H_x - iH_y = 0; \\ \mathcal{L} & A_z = C_3 P, & V = C_3 \dfrac{|\mathbf{k}|}{k} P, & E_z = -i\dfrac{k_0^2}{k} C_3 P, \\ & & \text{autres grandeurs nulles.} & \\ \mathcal{N}\mathcal{M} & I_2 = C_4 P, & U_t = \dfrac{k\,C_4 P}{k_0}, & U_z = -\dfrac{|\mathbf{k}|}{k_0} C_4 P, \\ & & \text{autres grandeurs nulles.} & \end{cases}$$

Les quatre ondes monochromatiques indépendantes $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}\mathcal{M}$ représentent respectivement : 1° une onde maxwellienne transversale circulaire droite ; 2° une onde maxwellienne transversale circulaire gauche ; 3° une onde maxwellienne longitudinale ; 4° une onde non maxwellienne.

A chaque valeur du vecteur $\mathbf{k}$, correspondent donc quatre ondes planes monochromatiques indépendantes correspondant à l'énergie positive donnée par $k = +\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2}$. On peut les considérer comme des fonctions propres de l'opérateur Hamiltonien pour la valeur *positive* de l'énergie $W = \frac{hc}{2\pi}$.

Il est évident que, pour $\mathbf{k}$ donné, on pourrait aussi satisfaire à (14) en prenant $k = -\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2}$, ce qui correspondrait à une énergie $W = \frac{kc}{2\pi}$ *négative*. A cette énergie négative, correspondraient quatre fonctions propres indépendantes. Nous aurons à considérer ces solutions à énergie négative qui sont analogues à celles qui sont bien connues en théorie de Dirac. Finalement à $\mathbf{k}$ donné, correspondent donc huit fonctions propres, quatre à énergie positive et quatre à énergie négative.

Il est facile de voir comment les fonctions propres (18) sont reliées aux diverses valeurs possibles de la composante du spin dans la direction de propagation Oz. La particule ayant un spin total maximum $\frac{h}{2\pi}$, les composantes du spin ont comme valeurs possibles $\pm\frac{h}{2\pi}$ et 0. Envisageons alors la valeur de la densité de spin σ_z donnée par (9). On peut

l'écrire

$$(19)\qquad \sigma_z = \frac{1}{c}\{E_x^* A_y - E_y^* A_x + V^* H_z\} + \frac{ih}{8\pi} U_z^* I_2 + \text{conj.}$$

$$= \frac{1}{2ic}[(E_x + iE_y)^*(A_x + iA_y) - (E_x - iE_y)^*(A_x - iA_y)]$$

$$+ \frac{ih}{8\pi} U_z^* I_2 + \text{conj.},$$

et cette forme nous montre immédiatement : 1° que σ_z est nul pour les ondes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{NM}$; 2° que σ_z est positif pour l'onde $\mathcal{G}$ et négatif pour l'onde $\mathcal{D}$. Nous en concluons que les ondes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{NM}$ correspondent à une composante z du spin égale à 0, les ondes $\mathcal{G}$ à une composante z du spin égale à $\frac{h}{2\pi}$ et les ondes $\mathcal{D}$ à une composante z du spin égale à $-\frac{h}{2\pi}$.

Une étude plus approfondie ([1]) montre que les valeurs nulles de σ_z ont pour les ondes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{NM}$ des significations différentes. En effet, la particule de spin maximum 1 décrite par les équations (6) et (6') du précédent chapitre peut être considérée comme résultant de la *fusion* de deux corpuscules de spin 1/2. Cette fusion peut donner une particule de spin 1 ou une particule de spin 0 suivant qu'il y a addition ou compensation des spins des deux constituants. Les grandeurs maxwelliennes décrivent la particule de spin 1, les grandeurs non maxwelliennes la particule de spin 0, ce qui explique pourquoi il y a indépendance complète entre les grandeurs et les équations maxwelliennes d'une part, les grandeurs et les équations non maxwelliennes d'autre part. Les grandeurs non maxwelliennes décrivant une particule de spin nul correspondent nécessairement à une valeur nulle de la composante z du spin. Au contraire, les grandeurs maxwelliennes, décrivant une particule de spin 1, correspondent aux trois valeurs possibles $\pm \frac{h}{2\pi}$ et 0 de la composante z du spin; à chacune de ces valeurs est lié un type de fonctions propres : type $\mathcal{D}$ pour la valeur $-\frac{h}{2\pi}$, type $\mathcal{G}$ pour la valeur $+\frac{h}{2\pi}$ et type $\mathcal{L}$ pour la valeur 0. Les ondes maxwelliennes longitudinales correspondent donc à une composante nulle du spin suivant Oz, tandis que les ondes maxwelliennes circulaires gauches et circulaires droites correspondent respectivement aux valeurs $\frac{h}{2\pi}$ et $-\frac{h}{2\pi}$ de cette composante. Ces considérations expliquent entièrement les résultats obtenus ci-dessus.

([1]) Voir *Théorie générale des particules à spin*, p. 134 et suiv.

3. Le vecteur densité-flux pour les ondes planes. Normalisation de ces ondes. — Nous pouvons écrire l'expression (6) de la densité ρ sous la forme

$$(20)\quad \rho = \frac{2\pi i}{hc}\left[\frac{1}{2}\{(A_x+iA_y)^*(E_x+iE_y) + (A_x-iA_y)^*(E_x-iE_y)\} + A_z^* E_z\right] - \frac{1}{4} I_2^* U_t + \text{conj.}$$

Nous obtenons donc

Pour l'onde $\mathcal{D}$: $\qquad \rho = \frac{2\pi k}{hc}|C_1|^2.$

Pour l'onde $\mathcal{G}$: $\qquad \rho = \frac{2\pi k}{hc}|C_2|^2.$

Pour l'onde $\mathcal{L}$: $\qquad \rho = \frac{4\pi}{hc}\frac{k_0^2}{k}|C_3|^2.$

Pour l'onde $\mathcal{MM}$: $\qquad \rho = \frac{k}{2k_0}|C_4|^2.$

Pour éviter les difficultés relatives aux spectres continus, nous normaliserons les ondes planes en les supposant contenues dans une enceinte de volume v fini, ce qui est très approximativement permis si les dimensions de v sont très grandes par rapport à la longueur d'onde. Nous obtiendrons ainsi en supposant $k > 0$

$$(21)\quad \begin{cases} |C_1| = \sqrt{\dfrac{hc}{2\pi k v}}, & |C_2| = \sqrt{\dfrac{hc}{2\pi k v}}, \\ |C_3| = \sqrt{\dfrac{khc}{4\pi k_0^2 v}}, & |C_4| = \sqrt{\dfrac{2k_0}{kv}}. \end{cases}$$

Les fonctions propres normées (pour $k > 0$) sont donc les suivantes:

Onde $\mathcal{D}$:

$$A_x - iA_y = \sqrt{\frac{hc}{2\pi k v}}\,P,\quad E_x - iE_y = -ik\sqrt{\frac{hc}{2\pi k v}}\,P,\quad H_x - iH_y = -|\mathbf{k}|\sqrt{\frac{hc}{2\pi k v}}$$

$$A_x + iA_y = 0,\quad E_x + iE_y = 0,\quad H_x + iH_y = 0.$$

Onde $\mathcal{G}$:

$$A_x + iA_y = \sqrt{\frac{hc}{2\pi h v}}\,P,\quad E_x + iE_y = -ik\sqrt{\frac{hc}{2\pi k v}}\,P,\quad H_x + iH_y = |\mathbf{k}|\sqrt{\frac{hc}{2\pi k v}}\,P,$$

$$A_x - iA_y = 0,\quad E_x - iE_y = 0,\quad H_x - iH_y = 0.$$

Onde $\mathcal{L}$:

$$A_z = \sqrt{\frac{khc}{4\pi k_0^2 v}}\,P,\quad V = \frac{|\mathbf{k}|}{k}\sqrt{\frac{khc}{4\pi k_0^2 v}}\,P,\quad E_z = -i\frac{k_0^2}{k}\sqrt{\frac{khc}{4\pi k_0^2 v}}\,P,\quad H_z = 0.$$

Onde $\mathcal{MM}$:

$$I_2 = \sqrt{\frac{2k_0}{kv}}\,P,\quad U_t = -\frac{k}{k_0}\sqrt{\frac{2k_0}{kv}}\,P,\quad U_z = -\frac{|\mathbf{k}|}{k_0}\sqrt{\frac{2k_0}{kv}}\,P,\quad U_x = U_y =$$

Ces expressions sont importantes à connaître.

Si l'on préfère décomposer les ondes maxwelliennes transversales en ondes rectilignement polarisées à angle droit, les ondes *normées* sont caractérisées par les grandeurs suivantes :

(23) Onde à vibration électrique parallèle à Ox :

$$A_x = \sqrt{\frac{hc}{4\pi kc}}\,P, \qquad E_x = ik\sqrt{\frac{hc}{4\pi kc}}\,P, \qquad H_y = i|\mathbf{k}|\sqrt{\frac{hc}{4\pi kc}}\,P,$$

$$A_y = A_z = V = 0.$$

Onde à vibration électrique parallèle à Oy :

$$A_y = \sqrt{\frac{hc}{4\pi kc}}\,P, \qquad E_y = ik\sqrt{\frac{hc}{4\pi kc}}\,P, \qquad H_x = -i|\mathbf{k}|\sqrt{\frac{hc}{4\pi kc}}\,P,$$

$$A_x = A_z = V = 0.$$

les valeurs trouvées plus haut pour l'onde longitudinale restant évidemment les mêmes.

Nous remarquerons que les valeurs obtenues pour ρ sont toujours proportionnelles à k : elles sont donc négatives pour les ondes à énergie négative et le procédé de normalisation employé échoue pour ce genre d'ondes (car il donnerait pour les $|C_n|$ des valeurs imaginaires !). Néanmoins le produit $W\rho = \frac{kc}{2\pi}\rho$ est toujours positif puisqu'il est proportionnel à k^2, et l'on peut toujours normer en énergie en posant

$$(24) \qquad \int_V \frac{kc}{2\pi}\rho\, d\tau = |h\nu| = \left|\frac{kc}{2\pi}\right|.$$

Nous avons déjà signalé ces circonstances importantes qui rentrent comme cas particuliers dans des résultats généraux de la théorie des particules à spin.

Nous avons obtenu l'expression des ondes planes monochromatiques (fonctions propres de l'hamiltonien) en supposant la direction de propagation prise pour axe des z. S'il n'en était pas ainsi, les expressions convenables s'obtiendraient facilement en tenant compte de la transformation des grandeurs tensorielles quand on opère une rotation des axes d'espace.

On peut donc considérer l'expression des ondes planes normées comme connue d'une façon générale à l'aide des grandeurs tensorielles. Les expressions de ces ondes à l'aide des $\Psi_{\sigma\tau}$ s'obtiendraient ensuite en substituant l'expression des grandeurs tensorielles en fonction des $\Psi_{\sigma\tau}$. Si nous désignons par Ψ_k l'une quelconque de ces fonctions propres normées correspondant à une valeur donnée de $\mathbf{k}$ et à une valeur

connue de σ_z, l'onde Ψ pourra se développer sous la forme

$$\Psi = \sum_k c_k \Psi_k, \tag{25}$$

ou, plus explicitement,

$$\Psi_{\sigma z} = \sum_k c_k (\Psi_k)_{\sigma z} \tag{26}$$

et, dans ce développement, pourront figurer en principe toutes les ondes planes à énergie positive *ou négative*. Si l'on admet que la fonction d'annihilation $\Psi^{(0)}$ est solution de l'équation d'ondes (ce qu'on réalise de la façon que nous avons expliquée), on devra avoir

$$\Psi = c_0 \Psi^{(0)} + \Sigma'_k c_k \Psi_k, \tag{27}$$

la somme Σ' portant sur les états non annihilés (¹). Les c sont des constantes complexes qui, si l'on pouvait normer la fonction d'onde pour une seule particule, obéirait à la relation

$$|c_0|^2 + \sum_k{}' |c_k|^2 = 1. \tag{28}$$

Mais l'état d'annihilation doit être considéré comme un réservoir inépuisable de particules (de photons dans le cas de la lumière), de telle sorte que l'on a jamais affaire à une seule particule. Il est donc nécessaire de recourir à la théorie de la seconde quantification, et ceci entraîne, nous le verrons, une modification profonde du rôle des c. Nous aurons à revenir longuement sur cette question.

Notons enfin que, si l'on calcule pour les ondes planes normées se propageant suivant Oz le vecteur flux de composantes f_x, f_y, f_z, on trouve pour tous les types d'ondes

$$f_x = f_y = 0, \qquad f_z = \rho \frac{c|\mathbf{k}|}{k} = \rho \frac{|\mathbf{p}|c^2}{W} = \rho v, \tag{29}$$

car la vitesse v du corpuscule obéit en Dynamique relativiste à la relation

$$v = c^2 \frac{|\mathbf{p}|}{W}. \tag{30}$$

(¹) Pour éviter les difficultés relatives aux ondes à énergie négative, nous serons plus loin amenés à admettre que *dans le développement* (27) *ne doivent figurer à côté de la fonction d'annihilation* $\Psi_{(0)}$ *que les ondes* Ψ_k *à énergie positive.*

Le vecteur d'espace **f** est donc bien le flux du fluide fictif de probabilité dont la densité est ρ, flux s'opérant dans la direction de propagation. C'est bien le résultat que l'on pouvait attendre.

4. Champs réels et champs complexes. Valeur de la constante K. — Dans ce paragraphe, nous allons porter particulièrement notre attention sur la théorie du photon. Les grandeurs **A**, V, **E** et **H** doivent alors être (en supposant μ_0^2 nul ou négligeable) les potentiels et champs électromagnétiques de l'onde lumineuse. Cependant ces grandeurs sont essentiellement complexes alors que les champs ou potentiels de la théorie électromagnétique usuelle sont des grandeurs réelles. D'où provient cette différence? A notre avis, et c'est un point sur lequel nous aurons longuement à revenir, les champs complexes représentent les phénomènes microscopiques tandis que les champs réels représentent à l'échelle macroscopique les phénomènes statistiques où interviennent un grand nombre de photons.

La correspondance à laquelle nous serons ainsi conduits entre les champs complexes et les champs réels nous amènera à définir le champ réel F_r en fonction du champ complexe F par la formule

$$(31) \qquad F_r = F + F^*.$$

Par exemple, la composante x du champ électrique étant représentée en Mécanique ondulatoire du photon par la grandeur complexe E_x, la grandeur réelle $E_x^{(r)}$ qui lui correspond pour les phénomènes à grand nombre de photons sera

$$(32) \qquad E_x^{(r)} = E_x + E_x^*.$$

De la correspondance générale (31), résulte qu'à une grandeur électromagnétique réelle de la forme monochromatique plane

$$F_r = F_0 \cos(kct - \mathbf{kr} + \varphi)$$

correspond la grandeur complexe $F = \frac{F_0}{2} e^{i(kct - \mathbf{kr} + \varphi)}$, de telle sorte que l'amplitude réelle F_0 de F_r est égale à $2\,|F|$.

Considérons maintenant une onde plane monochromatique contenant un grand nombre de photons. Elle est décrite macroscopiquement par des champs réels de la forme

$$(33) \qquad \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_0 \cos(kct - \mathbf{kr} + \varphi).$$

D'après la théorie électromagnétique classique, l'on a pour la valeur

moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique (en unité d'Heaviside)

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\overline{[\mathbf{E}_r^2 + \mathbf{H}_r^2]} = \overline{\mathbf{E}_r^2} = \frac{1}{2}|\mathbf{E}_0|^2. \tag{34}$$

car $\mathbf{E}_r$ et $\mathbf{H}_r$ ont même amplitude. Le champ complexe correspondant à $\mathbf{E}_r$ est

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}\, e^{i[kct - \mathbf{kr} + \varphi]} \qquad \text{avec} \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{E}| = \frac{1}{2}|\mathbf{E}_0|, \tag{35}$$

d'où

$$\overline{w} = 2|\mathbf{E}|^2. \tag{36}$$

Or, si nous nous reportons à l'expression précédemment trouvée

$$m_{44} = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + k_0^2(|\mathbf{A}|^2 - V^2) \tag{37}$$

qui doit nous donner la densité w de l'énergie en Mécanique ondulatoire du photon et si, pour effectuer le raccord avec la théorie électromagnétique usuelle, nous supposons k_0^2 nul ou négligeable, nous voyons que

$$w = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 = 2|\mathbf{E}|^2. \tag{38}$$

car alors $k = |\mathbf{k}|$ et l'on voit, en se reportant aux formules (18), que $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$.

La coïncidence de cette expression (38) de la densité microscopique d'énergie avec la densité macroscopique moyenne (36) nous montre que l'expression de m_{44} est bien celle qui est nécessaire pour pouvoir raccorder la théorie macroscopique des champs réels avec la théorie microscopique des champs complexes grâce à la relation (31).

Or cette expression (37) de m_{44} a été obtenue en posant la constante K figurant dans la définition des champs complexes égale à $\frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0}}$. Le choix de cette valeur de K se trouve ainsi justifié.

D'une façon générale, les expressions adoptées par la Mécanique ondulatoire du photon sont égales aux valeurs moyennes dans le temps des expressions classiques, valeurs moyennes qui seules sont accessibles à l'observation dans le cas des rayonnements. Bien que nous ayons raisonné sur le photon, la définition (31) des grandeurs tensorielles réelles à partir des grandeurs tensorielles complexes paraît, d'ailleurs, devoir être étendue à toutes les particules de spin 1.

5. **Remarques sur l'expression des champs complexes.** — La représentation des champs par des grandeurs complexes appelle quelques remarques. Pour représenter un nombre complexe $a + ib$, il faut se donner *deux* nombres *réels* a et b. De même, pour représenter un vecteur complexe $\mathbf{E}$, il faut se donner *deux* vecteurs *réels* $\mathbf{E}^{(1)}$ et $\mathbf{E}^{(2)}$ tels que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + i\mathbf{E}^{(2)}. \tag{39}$$

Si $\mathbf{E}$ est le champ électrique complexe de la théorie du photon, le champ réel correspondant est $\mathbf{E}_r = 2\mathbf{E}^{(1)}$ d'après la définition (31) du champ réel.

Soit une onde plane monochromatique dont la direction de propagation est prise pour axe oz. Si l'onde est *transversale*, $E_z = 0$ et les vecteurs $\mathbf{E}^{(1)}$ et $\mathbf{E}^{(2)}$ sont contenus dans le plan xoy. Posons

$$\varphi_j = 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{V}\right) + \delta_j \qquad (j = x, y), \tag{40}$$

nous aurons

$$E_j = |E_j|\, e^{i\varphi_j} \qquad (j = x, y), \tag{41}$$

d'où

$$\begin{cases} E_x^{(1)} = |E_x| \cos\varphi_x, & E_x^{(2)} = |E_x| \sin\varphi_x, \\ E_y^{(1)} = |E_y| \cos\varphi_y, & E_y^{(2)} = |E_y| \sin\varphi_y. \end{cases} \tag{42}$$

Pour une onde *rectilignement* polarisée, nous pouvons toujours prendre la direction du champ électrique pour axe ox. Alors $E_y^{(1)}$, $E_y^{(2)}$ et $|E_y|$ sont nuls et $E_x^{(1)} = |E_x| \cos\varphi_x$, $E_x^{(2)} = |E_x| \sin\varphi_x$. Les deux vecteurs réels $\mathbf{E}^{(1)}$ et $\mathbf{E}^{(2)}$ vibrent donc suivant ox et sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$.

Pour une onde circulaire *gauche*, nous avons $E_x = iE_y$ ou, ce qui revient au même, $E_x^{(1)} + iE_x^{(2)} = iE_y^{(1)} - E_y^{(2)}$, d'où

$$E_x^{(1)} = -E_y^{(2)}, \qquad E_x^{(2)} = E_y^{(1)}. \tag{43}$$

Alors (42) nous donne

$$|E_x| \cos\varphi_x = -|E_y| \sin\varphi_y$$

et

$$|E_y| \cos\varphi_y = |E_x| \sin\varphi_x,$$

d'où l'on tire

$$|E_x| = |E_y|, \qquad \varphi_y = \varphi_x - \frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

Si nous posons $\varphi_x = \varphi$, $|E_x| = |E_y| = E$, on trouve

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} E_x^{(1)} = E \cos \varphi, & E_x^{(2)} = E \sin \varphi, \\ E_y^{(1)} = E \sin \varphi, & E_y^{(2)} = -E \cos \varphi. \end{array} \right.$$

Les deux vecteurs $\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_r$ et $\mathbf{E}^{(2)}$ situés dans le plan d'onde sont de même longueur et tournent en sens inverse des aiguilles d'une montre avec un décalage d'un quart de période.

Pour une onde circulaire *droite*, $E_y = -iE_x$; on trouve alors que les deux vecteurs $\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_r$ et $\mathbf{E}^{(2)}$ sont situés dans le plan d'onde, ont la même longueur et tournent dans le sens des aiguilles d'une montre avec un décalage d'un quart de période.

Ces quelques remarques précisent la représentation d'un champ à l'aide d'un vecteur complexe.

CHAPITRE V.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON. EXAMEN DE DIFFICULTÉS.

1. Quelques caractéristiques de la Mécanique ondulatoire du photon. — Jusqu'à présent, nous avons envisagé le cas général de la particule de spin maximum 1 qu'on peut considérer comme formée par la fusion de deux corpuscules élémentaires de spin $\frac{1}{2}$ et qui comprend les cas (qui se révèlent indépendants) de la particule de spin 1 et de la particule de spin 0. Le premier cas est représenté par les grandeurs maxwelliennes et les équations correspondantes : on dit souvent que la particule de spin 1 est une particule *vectorielle* parce que toutes les grandeurs maxwelliennes qui la représentent dérivent du quadrivecteur potentiel de composantes A_x, A_y, A_z, V. Le second cas, celui de la particule de spin 0, est représenté par les grandeurs non maxwelliennes et les équations correspondantes : on dit souvent que la particule de spin 0 est une particule *pseudo-scalaire* parce que les grandeurs qui la représentent dérivent de la grandeur I_2 qui est un pseudo-invariant, c'est-à-dire un pseudo-scalaire, d'espace-temps. Ainsi, dans le cas du méson qui est une particule de spin entier à masse relativement grande (de l'ordre de 200 fois celle de l'électron), on distingue aujourd'hui un méson *vectoriel* de spin 1 représenté par des équations du type maxwellien et un méson *pseudo-scalaire* de spin 0 représenté par des équations du type non maxwellien.

Pour faire rentrer la théorie de la lumière dans le cadre de la théorie générale des particules de spin 1, il suffit de supposer que μ_0^2 et par suite k_0^2 sont nuls ou négligeables. Les équations maxwelliennes viennent alors coïncider avec les équations classiques de Maxwell (complétées par la relation de Lorentz entre potentiels) : elles représentent une particule de spin 1, de masse propre nulle ou négligeable, qu'on peut identifier avec le photon tel qu'il existe dans les ondes lumineuses ou plus généralement électromagnétiques. Quant aux équations non

maxwelliennes, elles représentent alors un *photon pseudo-scalaire* de spin o, qui n'est pas encore expérimentalement connu, mais le sera peut-être un jour.

Le fait que les équations maxwelliennes, quand on y néglige les termes en k_0^2, prennent exactement la forme des équations de Maxwell, entraîne naturellement que les ondes associées au photon ont alors toutes les propriétés des ondes électromagnétiques classiques. Néanmoins, si l'on admet que k_0^2 est extraordinairement petit sans être tout à fait nul, toutes les expressions de la théorie électromagnétique classique seront complétées par des termes de cet ordre de grandeur. Reportons-nous par exemple aux formules (16) du précédent Chapitre qui donnent les potentiels et les champs de l'onde plane monochromatique maxwellienne. Elles nous montrent que si k_0 est nul et k égal à $|\mathbf{k}|$, les champs **E** et **H** sont normaux à la direction de propagation, perpendiculaires entre eux et égaux en grandeur : c'est le cas classique de l'onde électromagnétique transversale. Comme $E_z = H_z = 0$, l'onde longitudinale se réduit à une onde de potentiel qui, au point de vue de la théorie classique pour laquelle le potentiel n'est qu'une grandeur intermédiaire, n'a pas de sens physique. Mais, si k_0 tout en étant petit n'est pas rigoureusement nul, k diffère de $|\mathbf{k}|$ par un terme de l'ordre de k_0^2, les champs électrique et magnétique de l'onde transversale, tout en restant rectangulaires, ne sont plus tout à fait égaux entre eux et, de plus, comme E_z n'est plus rigoureusement nul, l'onde longitudinale comporte un faible champ électrique. Bien que la différence entre les deux cas soit très petite, la question de savoir si la masse μ_0 est nulle ou simplement extrêmement petite, est théoriquement très importante.

2. Le point de vue de la théorie électromagnétique usuelle et celui de la Mécanique ondulatoire du photon. — La théorie classique pose implicitement que la masse propre μ_0 du photon est nulle. Elle ignore donc les termes en k_0^2 de la théorie des particules de spin 1. De plus, elle admet que seuls les champs ont un sens physique parce que, seuls, ils interviennent dans l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière, les potentiels n'étant à ses yeux que des intermédiaires de calcul servant à évaluer les champs. Même si l'on impose aux potentiels de satisfaire à la relation de Lorentz, ces potentiels restent encore très largement indéterminés car, si certaines valeurs de **A** et de V satisfaisant à la relation de Lorentz conviennent pour fournir les valeurs supposées connues des champs **E** et **H**, les grandeurs

$\mathbf{A} + \mathbf{grad}\,F$ et $V - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}$ donneront les mêmes valeurs des champs et satisferont aussi à la relation de Lorentz si F est une solution quelconque de $\square F = 0$. Le postulat qui enlève aux potentiels toute signification physique est souvent désigné sous le nom *d'invariance de jauge* ou parfois *d'invariance de jauge de seconde espèce* [1]. Ce postulat nous apparaît comme assez arbitraire.

La Mécanique ondulatoire du photon, partant pour établir la théorie de la lumière des équations générales de la particule de spin 1, doit avoir naturellement tendance à supposer que la masse propre μ_0 du photon ne doit pas, *a priori*, être considérée comme nulle, mais seulement comme assez petite pour que les termes en k_0^2 puissent être regardés comme pratiquement négligeables. En effet, si k_0 était nul, certaines difficultés apparaîtraient dans l'application de la théorie générale des particules de spin 1. Nous avons vu notamment que les équations (6′) du Chapitre III ne peuvent se déduire des équations (6) que si $k_0 \neq 0$ (*voir* p. 29). Effectivement, si $k_0 \neq 0$, les équations (6) en question nous fournissent les relations vectorielles

$$(1)\quad \begin{cases} \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, & \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\,V, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H} + k_0^2\mathbf{A}, & \operatorname{div}\mathbf{E} = -k_0^2 V, \end{cases}$$

d'où l'on déduit les équations du groupe (6′)

$$(2)\qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0;$$

mais, si k_0 était nul, on ne pourrait pas tirer des équations (6) les équations de définition des champs, c'est-à-dire les deux premières équations (1) et par suite on ne pourrait plus en déduire les deux premières équations (2). Nous verrons aussi que d'autres difficultés graves apparaissent quand on veut passer à la théorie superquantifiée ou quand on veut interpréter les interactions coulombiennes par des échanges virtuels de photons.

En outre, la Mécanique ondulatoire du photon nous a conduit tout naturellement à mettre sur un pied d'égalité les potentiels et les champs, par suite à considérer les potentiels comme des grandeurs physiques au même titre que les champs. Elle définit, en effet, les potentiels et

---

[1] Pour la distinguer de l'invariance de jauge de première espèce dont il a été question p. 18.

les champs par certaines combinaisons linéaires de $\Psi_{\sigma\tau}$ ou, si l'on veut, par certaines densités d'éléments de matrice associés au passage du photon d'un état initial non annihilé à un état final annihilé. Il n'y a dès lors aucune raison d'attribuer plus de sens physique aux champs qu'aux potentiels. Le fait que, dans l'état actuel de nos connaissances, les potentiels n'interviennent pas dans les interactions entre le champ électromagnétique et la matière, ne peut rien changer à cela.

Si l'on admet que $k_0 \neq 0$, les formules

$$(3) \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{k_0^2}\left[\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{E}}{dt} - \operatorname{rot}\mathbf{H}\right], \qquad V = -\frac{1}{k_0^2}\operatorname{div}\mathbf{E}.$$

permettent de calculer $\mathbf{A}$ et V en fonction de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{H}$. Il n'y a donc plus alors d'invariance de jauge. Toutefois, si k_0^2 est extrêmement petit, $\mathbf{A}$ et V ne seront plus *en pratique* calculables par les formules (3), car une très petite incertitude sur la valeur des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ conduira à une incertitude énorme sur celle des potentiels; *pratiquement* il y aura invariance de jauge. Mais il n'en reste pas moins vrai que pour la Mécanique ondulatoire du photon, il y a toujours *en principe* de *véritables* valeurs des potentiels, même quand l'extrême petitesse de k_0 ne permet pas pratiquement de déterminer ces valeurs à partir de celles des champs par les équations (3).

3. Objection contre l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ tirée de l'invariance de la vitesse de la lumière. — La tendance naturelle de la Mécanique ondulatoire est donc d'admettre que μ_0 n'est pas rigoureusement nulle et corrélativement de rejeter le postulat de l'invariance de jauge.

Cependant il est absolument certain que la masse propre μ_0 du photon doit être extraordinairement petite, énormément plus petite que la masse propre $m_0 = 0,9.10^{-27}$ gramme de l'électron. Il est, en effet, certain que les équations du photon doivent s'écarter extrêmement peu de celles de Maxwell. Si μ_0 n'était pas extraordinairement petit, la vitesse de déplacement du photon devrait varier avec sa fréquence suivant les formules

$$(4) \qquad h\nu = \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad v = c\sqrt{1-\frac{\mu_0^2 c^4}{h^2\nu^2}},$$

v étant ici la vitesse de l'énergie (ou vitesse de groupe) des ondes lumineuses. Il y aurait donc une *dispersion du vide*, la vitesse du front d'ondes étant plus élevée pour les grandes fréquences que pour les

petites. Le fait que cette dispersion du vide n'a pu être observée, même lors de la désoccultation des étoiles très lointaines, impose à μ_0 une limite supérieure. On peut se rendre compte par le calcul que cette limite est certainement inférieure à 10^{-44} gramme (¹). Certaines considérations cosmogoniques (²) conduisent même à penser que μ_0 pourrait être de l'ordre de 10^{-66} gramme. Ces valeurs sont évidemment extrêmement petites, mais elles n'ont rien d'inacceptable *a priori*.

Avec des valeurs aussi faibles de μ_0, il sera impossible de mettre en évidence par l'observation des vitesses de propagation des rayonnements dans le vide inférieures à c, car pour avoir un écart par rapport à c qui soit observable, il faudrait employer des rayonnements de fréquences si basses que l'étude de leur propagation serait impossible. Il est vrai que l'on pourrait se demander si l'existence de vitesses v inférieures à c pour des fréquences très basses ne modifierait pas sensiblement les lois classiques des phénomènes électromagnétiques statiques ou quasi statiques d'une manière qui serait en contradiction avec les données expérimentales, mais l'étude du cas le plus défavorable, celui des interactions statiques ($\nu = 0$) pour lequel la formule (4) donne pour v une valeur imaginaire de sorte qu'il n'y a plus alors de propagation vraie, montre que, si l'on attribue à μ_0 une valeur non nulle, on est simplement amené à remplacer le potentiel de Coulomb en $\frac{1}{r}$ par un potentiel en $\frac{1}{r} e^{-k_0 r}$: c'est là une question que nous reprendrons plus loin. Or, pour pouvoir effectivement observer l'influence du facteur exponentiel $e^{-k_0 r}$, c'est-à-dire pour mettre en évidence un écart par rapport à la loi de Coulomb, il faudrait se mettre à une distance du corps électrisé, source du champ, qui soit de l'ordre de $\frac{1}{k_0} = \frac{h}{2\pi\mu_0 c} \simeq \frac{10^{-37}}{\mu_0}$ centimètre et, si l'on suppose $\mu_0 < 10^{-44}$ gramme, toute vérification expérimentale se trouve exclue.

On pourrait encore objecter à l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ que si dans un certain système de référence galiléen la vitesse du photon était assez voisine de c pour ne pouvoir en être distinguée, il suffirait de faire une transformation de Lorentz correspondant à une vitesse relative voisine de c pour obtenir un photon qui, dans le nouveau système de référence, aurait une vitesse très inférieure à c. Pour lever cette objection, il suffit de développer sous une forme plus précise les considérations exposées plus haut.

(¹) Voir *Nouvelle Théorie de la Lumière*, 1, p. 39-40.

(²) Voir *Théorie générale des particules à spin*, p. 191.

D'abord nous pouvons admettre que la propagation et éventuellement les effets quantiques d'un rayonnement ne peuvent être mis en évidence que si sa fréquence est supérieure à une certaine fréquence ν_0. De plus, la vitesse de groupe $v = \beta c$ d'un rayonnement ne peut être discernée de c que si

$$(5) \qquad \beta > 1 - \eta_0 \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

η_0 étant un nombre très inférieur à un. Les nombres ν_0 et η_0 peuvent dépendre de l'état de perfectionnement actuel de la technique expérimentale, mais on peut admettre qu'ils ont à une époque donnée mêmes valeurs dans tous les systèmes de référence, puisqu'un observateur dispose dans tous ces systèmes des mêmes moyens d'investigation expérimentale.

Ceci posé, pour que la propagation d'un rayonnement soit susceptible d'être étudiée expérimentalement, il faut que ses photons aient une énergie supérieure à $h\nu_0$, ce qui nous donne

$$(6) \qquad \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} > h\nu_0.$$

D'autre part, pour que la vitesse de ces photons soit indiscernable de c, il faut que la relation (5) soit vérifiée et pour que (5) soit une conséquence de (6) il faut que

$$(7) \qquad \mu_0 < \frac{h\nu_0}{c^2}\sqrt{1 - (1 - \eta_0)^2} \sim \frac{h\nu_0}{c^2}\sqrt{2\eta_0}.$$

Donc si μ_0 (qui est une constante de la nature par hypothèse) est assez petite pour que l'inégalité (7) soit vérifiée, tout photon qui, dans un système galiléen, possède une énergie suffisante pour que son existence soit décelable, y possède une vitesse indiscernable de c. Ce résultat nous permet donc de supposer $\mu_0 \neq 0$ à condition que cette masse propre soit suffisamment petite.

Comme les constantes ν_0 et η_0 dépendent de l'état de perfection de la technique expérimentale, il ne serait pas, en principe, interdit d'espérer que les progrès de cette technique permettent un jour, grâce à une diminution des valeurs de ν_0 et η_0, de mettre en défaut l'inégalité (7) : ce jour-là, la mise en évidence de vitesses du photon inférieures à c et, par suite, la mesure de μ_0 deviendrait possible. Néanmoins si μ_0 avait une valeur aussi faible que, par exemple, 10^{-65} gramme, cet espoir resterait sans doute chimérique.

4. L'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ et la définition de la vitesse c en théorie de la Relativité. — On pourrait encore être tenté de faire à l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ une objection apparentée aux précédentes. Les raisonnements qui ont permis à M. Einstein de jeter les premières bases de la Relativité invoquent le fait que les signaux lumineux sont les plus rapides de tous les signaux possibles. Ils admettent aussi, conformément aux résultats de la fameuse expérience de Michelson et des autres expériences analogues, que dans tout système de référence galiléen la lumière possède la même vitesse c de propagation dans le vide et obéit par suite toujours à l'équation de propagation

$$\square \varphi = 0. \tag{8}$$

De ces hypothèses, se déduisent les formules de la transformation de Lorentz où figure la vitesse c, puis les lois de la cinématique et de la dynamique relativiste. La variation de la masse avec la vitesse en dynamique relativiste montre alors que la vitesse c ne peut être atteinte par aucune particule de masse propre non nulle. Comment peut-on concilier cette chaîne de déductions avec l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$, laquelle implique que les photons ont une vitesse inférieure à c et variable avec la fréquence ?

En réalité, il ne nous semble pas qu'il y ait là une difficulté véritable. On peut, en effet, reprendre avec l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ tous les raisonnements d'Einstein en désignant par c la vitesse limite supérieure de tous les signaux possibles, vitesse supposée existante et de même valeur dans tous les systèmes galiléens, et en admettant que les photons d'énergie suffisante pour être décelée ont toujours dans le vide une vitesse *pratiquement* égale à c, c'est-à-dire qu'ils obéissent pratiquement à l'équation de propagation (8) comme le prouve l'expérience de Michelson. Ainsi la vitesse c qui s'introduit dans les formules de Lorentz et dans celles de la cinématique et de la dynamique relativistes est une vitesse limite qu'aucune particule ne peut rigoureusement atteindre, mais dont elle peut approcher quand son énergie devient très grande. En raison de leur masse propre extraordinairement petite, les photons décelables auraient toujours pratiquement, comme nous l'avons vu, une vitesse indiscernable de c et qui, d'ailleurs, tendrait vers c quand la fréquence du photon croîtrait indéfiniment.

Aucune difficulté sérieuse ne nous paraît donc exister de ce côté. Pour éviter toute équivoque, il suffit de désigner la constante c sous le nom de *vitesse limite de l'énergie* et non sous celui de *vitesse de la lumière* qui peut prêter à confusion.

5. Objection contre l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ tirée de la théorie du rayonnement noir. — Quand on développe la théorie de la répartition spectrale de l'énergie dans le rayonnement noir par la méthode de M. Jeans, on est conduit, si l'on tient compte de l'existence des quanta, à attribuer à chaque onde stationnaire dans le rayonnement noir la même énergie moyenne

$$(9) \qquad \overline{w} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

où T est la température absolue de l'enceinte, k la constante de Boltzmann, ν la fréquence des ondes stationnaires. Or, dans une enceinte vide de volume v, il y a

$$(10) \qquad dn_\nu = \frac{4\pi\nu^2\, d\nu}{c^3}\, v$$

ondes stationnaires possibles de polarisation déterminée correspondant à l'intervalle de fréquence $\nu \to \nu + d\nu$. Si l'on admet que les ondes lumineuses sont toujours rigoureusement transversales, le nombre des ondes stationnaires possibles de l'intervalle $\nu \to \nu + d\nu$ s'obtiendra en doublant l'expression (10), parce qu'il y a toujours deux états indépendants de polarisation possible pour chaque onde transversale (circulaire droite et circulaire gauche par exemple). On est donc ainsi conduit à l'expression suivante de la densité d'énergie dans le rayonnement noir pour l'intervalle de fréquence $\nu \to \nu + d\nu$

$$(11) \qquad \rho(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu.$$

C'est la loi de Planck bien vérifiée par l'expérience.

Mais, si nous admettons l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$, il doit exister aussi des ondes longitudinales stationnaires dont le nombre sera donné par (10) et alors la densité de l'énergie devrait être

$$(12) \qquad \rho(\nu)\, d\nu = \frac{12\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu,$$

ce qui est contraire l'expérience.

Il semble que l'on puisse répondre à cette objection de la façon suivante. La mesure d'une énergie rayonnante (telle que celle qui s'échappe d'un four maintenu à température uniforme) s'effectue toujours par l'intermédiaire d'une action du rayonnement sur des

éléments matériels : or cette action ne dépend que des champs *et non des potentiels* et ne peut, par suite, déceler l'énergie électromagnétique présente que si elle est représentée par des *champs* d'intensité suffisante. Reprenons alors l'expression de la densité de l'énergie en Mécanique ondulatoire du photon

$$(13) \qquad w = -m_{44} = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 + k_0^2(|\mathbf{A}|^2 - V^2).$$

Pour une onde monochromatique transversale (circulaire droite ou gauche), on a

$$(14) \qquad A_x \pm i A_y = CP; \qquad E_x \pm i E_y = -ikCP; \qquad H_x \pm i H_y = \pm |\mathbf{k}|\, CP$$
$$E_z = H_z = A_z = V = 0.$$

et par suite

$$(15) \qquad w = |C|^2[k^2 + |\mathbf{k}|^2] + k_0^2 |C|^2 = 2k^2 |C|^2.$$

Il est donc visible que le premier terme provenant des champs est beaucoup plus grand que le second provenant des potentiels : ceci résulte de la très petite valeur de k_0 et du fait que, les rayonnements mesurés ayant toujours des fréquences élevées, $k \simeq |k|$ est grand. L'énergie est donc presque exclusivement présente sous forme de champs et elle est décelable expérimentalement.

Il en est tout autrement pour les ondes longitudinales car on a pour elles

$$(16) \qquad A_z = CP; \qquad V = C\frac{|\mathbf{k}|}{k}P; \qquad E_z = -i\frac{k_0^2}{k}CP; \qquad H_z = 0,$$
$$H_x = H_y = E_x = E_y = A_x = A_y = 0,$$

et par suite

$$(17) \qquad w = \frac{k_0^4}{k^2}|C|^2 + k_0^2\left(1 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{k^2}\right)|C|^2 = 2k_0^2 |C|^2.$$

Ici c'est le second terme provenant des potentiels qui est visiblement beaucoup plus grand que le premier provenant des champs : l'énergie est donc concentrée dans les potentiels et par suite pratiquement indécelable.

Il faut d'ailleurs ajouter que l'énergie des ondes longitudinales ne peut être émise qu'extraordinairement lentement par la matière puisque, pour ces ondes, le terme de couplage entre matière et rayonnement (qui dépend de E_z) est extrêmement faible. L'équilibre thermodynamique ne peut donc, en ce qui les concerne, être atteint que fort lentement, ce qui peut aussi contribuer à les rendre indécelables.

Il semble donc bien que la vérification expérimentale de la loi (11) du rayonnement de Planck n'est pas en contradiction avec l'hypothèse $\mu_0 \neq 0$ si μ_0 est suffisamment petit.

Bref, de l'ensemble des considérations développées dans ce chapitre, résulte à notre avis qu'aucune objection insurmontable ne s'oppose à l'hypothèse suivant laquelle la masse propre du photon ne serait pas rigoureusement nulle.



CHAPITRE VI.

QUESTIONS RELATIVES AU SPIN DU PHOTON.

1. **Le moment d'impulsion d'un rayonnement.** — Nous allons développer quelques remarques au sujet d'un problème étudié dans un article de M. J. Humblet ([1]), où l'auteur, se plaçant au point de vue de la théorie électromagnétique classique, critique certains résultats obtenus en Mécanique ondulatoire du photon par M. Géhéniau.

Nous avons vu que les tenseurs T'_{ik} et m_{ik} sont intégralement équivalents. En particulier, les vecteurs d'espace de composantes T'_{4k} et m_{4k} avec $k = 1, 2, 3$ sont intégralement équivalents. Il n'en résulte pas que les moments de ces vecteurs par rapport à un même point le soient aussi et, en fait, ils ne le sont pas : le moment d'impulsion d'un rayonnement, que nous avons défini à l'aide du vecteur T'_{4k} ne coïncide pas avec celui qu'on peut définir à l'aide de m_{4k}. Or c'est ce dernier qui correspond au moment d'impulsion d'un rayonnement défini par la théorie classique.

Pour préciser ce point, plaçons-nous d'abord en théorie électromagnétique classique. Cette théorie emploie les champs *réels* $\mathbf{E}_r$ et $\mathbf{H}_r$ et attribue à la densité d'impulsion d'un rayonnement la valeur $\frac{1}{c}[\mathbf{E}_r \mathbf{H}_r]$. En désignant par $\mathbf{R}$ le vecteur qui joint l'origine à un élément de volume $d\tau$, elle adopte donc tout naturellement comme moment d'impulsion d'un rayonnement par rapport à l'origine des coordonnées le vecteur

$$\mathbf{M}_{cl} = \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{R}[\mathbf{E}_r \mathbf{H}_r]]\, d\tau, \tag{1}$$

v étant le volume total occupé par le rayonnement. Décomposons $\mathbf{E}_r$ et $\mathbf{H}_r$ en une somme de quantités complexes conjuguées suivant le schéma

([1]) *Physica*, X, 7, 1943, p. 585.

adopté précédemment

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E} + \mathbf{E}^*, \tag{2}$$

et prenons la moyenne dans le temps de $\mathbf{M}_{cl}$, moyenne qui seule est accessible à l'observation. Les termes en $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ et en $[\mathbf{E}^*\mathbf{H}^*]$ donnant zéro en moyenne, il reste

$$\mathbf{M}_{cl} = \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{R}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}]]\, d\tau + \text{conj.} \tag{3}$$

Remplaçons $\mathbf{H}$ par rot $\mathbf{A}$ et intégrons par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}}_{cl} = {} & \frac{1}{c}\int_v \sum_{j=1}^{3} E_j^* [\mathbf{R} \times \overrightarrow{\text{grad}}]\, A_j\, d\tau + \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{E}^*\mathbf{A}]\, d\tau \\ & + \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{R}\,\mathbf{A}]\, \text{div}\, \mathbf{E}^*\, d\tau - \frac{1}{c}\int_S [\mathbf{R}\,\mathbf{A}](\mathbf{E}^*\mathbf{n})\, ds + \text{conj.},\end{aligned} \tag{4}$$

S étant la surface qui limite le volume v et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire porté en chaque point sur la normale à cette surface. La troisième intégrale est nulle parce qu'en théorie classique div $\mathbf{E} = 0$.

Nous pouvons naturellement reprendre le même calcul en Mécanique ondulatoire du photon. Nous savons que les valeurs moyennes dans le temps des grandeurs classiques coïncident en général avec les expressions obtenues en Mécanique ondulatoire du photon. Si donc l'on adoptait comme densité d'impulsion du rayonnement le vecteur $\frac{\mathbf{m}_{4k}}{ic}$ tel qu'il est défini en théorie du photon, le moment d'impulsion aurait pour composante k

$$\int_v \left[\mathbf{R}\,\frac{\mathbf{m}_{4k}}{ic}\right] d\tau \tag{5}$$

avec

$$\frac{1}{ic}\, m_{4k} = \frac{1}{c}\left\{[\mathbf{E}^*\mathbf{H}]_k + k_0^2\, V^* A_k\right\} + \text{conj.} \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

En remplaçant $\mathbf{H}$ par rot $\mathbf{A}$ et en intégrant par parties, on trouverait

$$\begin{aligned}\int_v \left[\mathbf{R}\,\frac{\mathbf{m}_{4k}}{ic}\right] d\tau = {} & \frac{1}{c}\int_v \sum_{j=1}^{3} E_j^* [\mathbf{R} \times \overrightarrow{\text{grad}}]\, A_j\, d\tau \\ & + \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{E}^*\mathbf{A}]\, d\tau + \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{R}\,\mathbf{A}]\, \text{div}\, \mathbf{E}^*\, d\tau \\ & + \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{R}\,\mathbf{A}]\, k_0^2\, V^*\, d\tau - \frac{1}{c}\int_s [\mathbf{R}\,\mathbf{A}](\mathbf{E}^*\mathbf{n})\, ds + \text{conj.}\end{aligned} \tag{7}$$

Les troisième et quatrième intégrales se compensent en vertu de la relation $\operatorname{div} \mathbf{E}^* = -k_0^2 V^*$, et le résultat ainsi obtenu coïncide bien avec l'expression (4) de $\overline{\mathbf{M}}_{cl}$, comme on pouvait s'y attendre.

Mais, et voici le point essentiel, la Mécanique ondulatoire doit définir le moment d'impulsion d'un rayonnement à partir de la densité d'impulsion $\frac{1}{ic}\mathbf{T}'_{4k}$ et non à partir de $\frac{1}{ic}\mathbf{m}_{4k}$. Elle pose donc

$$(8) \qquad \mathbf{M} \int_v \left[\mathbf{R}\,\frac{1}{ic}\,\mathbf{T}'_{4k}\right] d\tau,$$

et cette expression n'est pas égale à (5). Son calcul donne en effet

$$(9) \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{c}\int_v \sum_{j=1}^{3} E_j^*\left[\mathbf{R}\times\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right] A_j\, d\tau + \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{E}^*\mathbf{A}]\, d\tau + \frac{1}{c}\int_v V^*\mathbf{H}\, d\sigma + \text{conj}.$$

$\mathbf{M}$ diffère donc de $\overline{\mathbf{M}}_{cl}$ par l'absence de l'intégrale de surface et par la présence du terme supplémentaire $\frac{1}{c}\int_v V^*\mathbf{H}\, d\tau$. Dans l'expression (9) de $\mathbf{M}$, le premier terme correspond au moment orbital du photon, les deux suivants au moment propre du spin.

Il y a entre les expressions (1) et (8) une grande différence, la première satisfait à l'invariance de jauge, la seconde ne le fait pas. Que $\overline{\mathbf{M}}_{cl}$ soit invariante de jauge, cela résulte immédiatement du fait que sa définition ne fait intervenir que les champs et non les potentiels; on peut d'ailleurs vérifier l'invariance de jauge de l'expression (4) en y remplaçant $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, F$ et en constatant que les termes en F se compensent. Au contraire, l'expression (8) de $\mathbf{M}$ admise par la Mécanique ondulatoire du photon n'admet pas l'invariance de jauge comme on le vérifie aisément : son adoption implique donc que l'on considère les potentiels comme de véritables grandeurs physiques ayant des valeurs bien déterminées.

Si l'on tient absolument à conserver l'invariance de jauge, il faut donc adopter pour le moment d'impulsion du rayonnement l'expression $\overline{\mathbf{M}}_{cl}$, mais alors [1], pour les particules de spin 1 à masse propre certainement non nulle comme le méson, il faudra adopter l'expression (8) du moment d'impulsion et pour le photon l'expression (5). Cette manière de faire qui traite différemment deux particules de spin 1 ne nous paraît pas très satisfaisantes. L'examen du cas simple de l'onde plane mono-

[1] *Voir* Humblet, *loc. cit.*, p. 587.

chromatique (étudiée aussi par M. Humblet dans son Mémoire) va également nous montrer que l'emploi de l'expression classique (1) conduit à des conclusions physiquement moins satisfaisantes que celui de l'expression (8).

2. Étude du cas de l'onde plane monochromatique. — Nous allons étudier le moment d'impulsion d'une onde plane monochromatique en nous servant tout d'abord des formules de la Mécanique ondulatoire du photon.

Nous prendrons toujours la direction de propagation de l'onde plane pour axe des z et nous considérerons le volume délimité par une sphère de centre O et de rayon R, volume égal à $v = \frac{4}{3}\pi R^3$. Cherchons le moment d'impulsion par rapport à l'origine O de la portion de rayonnement contenue dans cette sphère en adoptant le point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon. Le moment orbital est nul, c'est évident par raison de symétrie et il est aisé de le vérifier par le calcul. Si nous supposons l'onde photonique transversale, nous pourrons poser $V = 0$ et $\mathbf{M}$ se réduira à

$$(10) \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{c}\int_v |\mathbf{E}^* \mathbf{A}| + \text{conj}.$$

Faisons le calcul pour une onde polarisée circulairement, par exemple circulaire gauche. Nous avons

$$(11) \qquad A_x = A, \qquad A_y = -iA, \qquad E_x = -ikA, \qquad E_y = -kA, \qquad E_z = 0,$$

et la normalisation de l'onde plane dans un volume $\mathcal{V}$ dont les dimensions sont supposées très supérieures à la longueur d'onde et à R nous donne

$$(12) \qquad 4|A|^2 = \frac{hc}{2\pi k \mathcal{V}}.$$

Nous trouvons donc

$$(13) \qquad \begin{cases} M_z = S_z = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_v [E_x^* A_y - E_y^* A_x]\, d\tau + \text{conj} = 4\dfrac{k}{c}|A|^2 v = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{v}{\mathcal{V}}, \\ M_x = M_y = 0. \end{cases}$$

Ce résultat est satisfaisant, il exprime que la composante z de la densité de spin a la valeur uniforme $\frac{h}{2\pi}\frac{1}{\mathcal{V}}$, ce qui est naturel puisque le photon d'une onde circulaire gauche a un spin $S_z = \frac{h}{2\pi}$ et que l'onde plane est

homogène. Pour une onde circulaire droite, on trouverait

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{M}_z = -\frac{h}{2\pi}\frac{v}{\mathcal{V}},$$

correspondant au spin $-\frac{h}{2\pi}$ du photon.

Si maintenant nous faisons le même calcul avec les formules de la théorie classique, nous allons arriver à un résultat assez paradoxal. Nous devons, en effet, écrire alors

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{M}_z = \frac{1}{c}\int_v \sum_{j=1}^{3} \mathrm{E}_j^* \left[\mathrm{R} \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right]_z \mathrm{A}_j \, d\tau$$
$$+ \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{E}^* \mathbf{A}]_z \, d\tau - \frac{1}{c}\int_S [\mathbf{R}\,\mathbf{A}]_z (\mathbf{E}^*\mathbf{n}) \, ds + \text{conj.},$$

et appliquer cette formule à la sphère. Le premier terme est nul par raison de symétrie. Pour une onde circulaire gauche, le second terme augmenté de son conjugué a la valeur $\frac{h}{2\pi}\frac{v}{\mathcal{V}}$ trouvée plus haut. Mais il reste les intégrales de surface qui nous donnent

$$\text{(16)} \qquad -\frac{1}{c}\int_S [\mathbf{R}\mathbf{A}]_z (\mathbf{E}^*\mathbf{n}) \, ds + \text{conj.}$$
$$= -\frac{1}{c}\int_S (x\mathrm{A}_y - y\mathrm{A}_x)\left[\mathrm{E}_x^* \frac{x}{\mathrm{R}} + \mathrm{E}_y^* \frac{y}{\mathrm{R}}\right] \mathrm{R}^2 \, d\Omega + \text{conj.}$$
$$= -\frac{k}{c}|\mathrm{A}|^2 \int_S (x - iy)(x + iy)\,\mathrm{R}\, d\Omega + \text{conj.}$$
$$= -\frac{k}{c}|\mathbf{A}|^2 \frac{2}{3}\int_S \mathrm{R}^3 \, d\Omega + \text{conj.} = -4\frac{k}{c}|\mathrm{A}|^2 v = -\frac{h}{2\pi}\frac{v}{\mathcal{V}}.$$

Cette valeur étant égale et de signe contraire à celle que fournit la seconde intégrale de (15), on a finalement

$$\text{(17)} \qquad \overline{\mathbf{M}}_z = 0.$$

D'où cette conclusion paradoxale que dans une onde plane monochromatique polarisée circulairement, la densité du moment d'impulsion et par suite la densité de spin sont nulles.

On peut chercher à atténuer cette difficulté en remarquant qu'une onde plane est une fiction et que l'on a toujours affaire en pratique à un groupe d'ondes de dimensions limitées. En considérant alors une surface S située tout entière à l'extérieur du groupe d'ondes, on

annulera l'intégrale de surface dans (15) et il restera

$$\overline{\mathbf{M}} = \frac{1}{c}\int_v [\mathbf{E}^*\mathbf{A}]\,d\tau + \text{conj.}, \tag{18}$$

ce qui donnera bien $\pm \frac{h}{2\pi}$ pour l'ensemble d'une onde circulairement polarisée. Mais avec ce point de vue la densité de moment d'impulsion se trouve entièrement localisée aux limites du groupe d'ondes, à l'endroit où l'onde n'est plus homogène, au lieu d'être uniformément répartie dans toute l'onde plane comme l'enseigne la Mécanique ondulatoire du photon. Un tel résultat nous paraît peu satisfaisant au point de vue physique, et cela d'autant plus qu'on peut supposer les limites du groupe d'ondes aussi éloignées qu'on veut du point O. La Mécanique ondulatoire nous semble se tenir plus près de la réalité physique, son point de vue permet d'ailleurs de démontrer immédiatement une formule célèbre due à M. Sommerfeld, qui a joué naguère un rôle important dans l'établissement des règles de sélection de l'ancienne théorie des quanta. La théorie classique ne permet de retrouver cette formule que par des raisonnements beaucoup plus détournés et un peu embarrassés ([1]).

3. **Formule de Sommerfeld donnant pour une onde plane monochromatique le rapport entre la densité de moment d'impulsion et la densité d'énergie.** — Considérons une onde plane monochromatique se propageant le long de oz et supposons μ_0 assez petit pour qu'on puisse négliger les termes en μ_0^2. Les potentiels de l'onde plane sont avec ces hypothèses

$$A_x = a_1 e^{i\varphi_1}P, \qquad A_y = a_2 e^{i\varphi_2}P, \qquad A_z = a_3 e^{i\varphi_3}P, \qquad V = A_z \qquad (P = e^{i(kct-kz)}), \tag{19}$$

les constantes a_1, a_2, a_3, φ_1, φ_2, φ_3 étant réelles. Pour les champs, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{lll} E_x = -ika_1 e^{i\varphi_1}P, & E_y = -ika_2 e^{i\varphi_2}P, & E_z = 0, \\ H_x = ika_2 e^{i\varphi_2}P, & H_y = -ika_1 e^{i\varphi_1}P, & H_z = 0. \end{array} \right. \tag{20}$$

En Mécanique ondulatoire du photon, la densité de spin est donnée par la formule

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{c}\left\{ [\mathbf{E}^*\mathbf{A}] + \mathbf{V}^*\mathbf{H} \right\} + \text{conj.} \tag{21}$$

([1]) Voir la fin du Mémoire de M. Humblet.

Calculons d'abord σ_x

$$(22) \qquad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{c}[\mathrm{E}_y^* \mathrm{A}_z - \mathrm{E}_z^* \mathrm{A}_y] + \mathrm{V}^* \mathrm{H}_x + \text{conj.} \\ &= \frac{1}{c} ik a_2 a_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)} \\ &\quad + \frac{1}{c} ik a_2 a_3 e^{i(\varphi_2 - \varphi_3)} + \text{conj.} \\ &= \frac{2ik a_2 a_3}{c} \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + \text{conj.} = 0. \end{aligned}$$

On trouve de même $\sigma_y = 0$.

Reste à calculer σ_z

$$(23) \qquad \sigma_z = \frac{1}{c}[\mathrm{E}_x^* \mathrm{A}_y - \mathrm{E}_y^* \mathrm{A}_x] + \text{conj.} = -\frac{4k a_1 a_2}{c} \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Or la densité d'énergie est, en négligeant les termes en μ_0^2,

$$(24) \qquad w = -\mathrm{T}_{44} = -m_{44} = |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 = 2|\mathbf{E}|^2 = 2k^2(a_1^2 + a_2^2),$$

d'où enfin

$$(25) \qquad \frac{\sigma_z}{w} = -\frac{2 a_1 a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{kc(a_1^2 + a_2^2)}.$$

Posons $a_1 = a$ et $a_2 = b$; souvenons-nous que $kc = 2\pi\nu = \omega$ pulsation de l'onde. Il vient

$$(26) \qquad \frac{\sigma_z}{w} = -\frac{2ab \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\omega(a^2 + b^2)}.$$

C'est la formule de Sommerfeld, compte tenu du sens des axes employés ici.

Pour une onde polarisée circulairement, on a $b = a$, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ et par suite

$$(27) \qquad \frac{\sigma_z}{w} = \pm \frac{1}{\omega} = \pm \frac{\frac{h}{2\pi}}{h\nu},$$

comme cela doit être puisque l'énergie totale vaut $h\nu$ et le moment d'impulsion total $\pm \frac{h}{2\pi}$ (suivant le sens de la polarisation circulaire) et que, d'autre part, les densités w et σ_z sont constantes dans l'onde homogène.

En Mécanique ondulatoire du photon, tout cela est très clair. Par contre, comme nous l'avons dit, la démonstration de la formule (26) par la théorie classique est beaucoup moins directe.

Ajoutons encore une remarque. Comme l'a noté M. Humblet ([1]), si l'on néglige les termes en k_0^2, les formules de la Mécanique ondulatoire du photon ne ramènent pas toujours à celles de la théorie de Maxwell. Même, si l'on suppose *pratiquement* négligeables dans les calculs les termes en k_0^2, une définition comme celle du moment d'impulsion **M** par la formule (8) qui se présente naturellement en Mécanique ondulatoire du photon ne rentre pas dans le cadre de la théorie classique parce qu'elle ne possède pas l'invariance de jauge.

4. Étude de l'onde dipolaire électrique circulairement polarisée. — Considérons un dipôle circulaire placé dans un plan pris pour plan des xy. Soient

$$(28) \qquad P_x = a\,e^{ikct}, \qquad P_y = \pm\, ia\,e^{ikct}, \qquad P_z = 0$$

les composantes de son moment dipolaire. Le signe — correspond à un dipôle circulaire gauche, le signe + à un dipôle circulaire droit. On trouve aisément les formules

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & |\mathbf{P}|^2 = |P_x|^2 + |P_y|^2 + |P_z|^2, \qquad (\mathbf{n}\mathbf{P}) = \frac{x \pm iy}{r}\,a\,e^{ikct}, \\ & \qquad\qquad |(\mathbf{n}\mathbf{P})|^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}\,|a|^2, \\ & [\mathbf{P}^*\mathbf{P}] = \left\{ \begin{array}{l} 0, \\ 0, \\ \mp 2i\,|a|^2, \end{array} \right. \qquad [\mathbf{n}\mathbf{P}] = \left\{ \begin{array}{l} \mp \dfrac{z}{r}\,ia\,e^{ikct}, \\ \dfrac{z}{r}\,a\,e^{ikct}, \\ -a\,\dfrac{y \mp ix}{r}\,e^{ikct}, \end{array} \right. \end{aligned} \right.$$

r étant la distance du point considéré à l'origine et **n** le vecteur unité porté suivant le rayon vecteur.

L'onde émise par ce dipôle circulaire comporte un champ électrique et un champ magnétique qui, en négligeant les termes d'ordres supérieurs en $\frac{1}{r}$, s'expriment à grande distance par

$$(30) \qquad \mathbf{E} = \frac{k^2}{4\pi r}\,e^{-ikr}\big(\mathbf{P} - (\mathbf{n}\mathbf{P})\,\mathbf{n}\big); \qquad \mathbf{H} = \frac{k^2}{4\pi r}\,e^{-ikr}[\mathbf{n}\mathbf{P}].$$

Ces champs dérivent des potentiels suivants (calculés par la méthode

([1]) *Loc. cit.*, p. 593.

des potentiels retardés, toujours en se limitant aux termes en r^{-1})

$$(a) \qquad \mathbf{A} = \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \mathbf{P} e^{ikct}; \qquad \mathrm{V} = (\mathbf{n}\,\mathbf{A}) = \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} (\vec{\mathbf{n}}\,\vec{\mathbf{P}}) e^{ikct}.$$

Si l'on admet l'invariance de jauge, on peut remplacer ces potentiels a par d'autres équivalents et en particulier par les suivants :

$$(b) \qquad \mathbf{A} = \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \big(\mathbf{P} - (\mathbf{n}\,\mathbf{P})\,\mathbf{n}\big) e^{ikct}; \qquad \mathrm{V} = 0.$$

Il importe de faire la remarque suivante : Avec le choix a des potentiels, on a une onde transversale à laquelle est superposée une onde longitudinale (qui, avec ces expressions classiques supposant implicitement $k_0 = 0$, se réduit à une onde de potentiels avec champs nuls). Par contre, les potentiels b sont caractérisés par le fait que l'onde correspondante est purement transversale, sans mélange d'onde longitudinale. Naturellement, avec la conception classique qui refuse toute réalité aux potentiels, les choix a et b sont équivalents.

Calculons la densité ρ correspondant à l'onde dipolaire en Mécanique ondulatoire du photon. Quel que soit le choix a ou b des potentiels, on trouve

$$(31) \qquad \rho = \frac{2\pi i}{hc}(\mathbf{A}^*\mathbf{E}) + \text{conj.}$$
$$= \frac{2\pi k^3}{hc}\,\frac{1}{16\pi^2 r^2}\big\{|\mathbf{P}|^2 - |(\mathbf{n}\,\mathbf{P})|^2\big\} + \text{conj.} = \frac{k^3|a|^2}{4\pi h c r^2}(1 + \cos^2\theta),$$

θ étant l'angle zoM si M est le point où l'on calcule ρ. Pour normer l'onde dipolaire, nous supposerons qu'elle possède un front d'onde et que, par suite, elle est à chaque instant entièrement contenue dans une sphère Σ de rayon R (avec $R \gg \lambda$). Nous considérons l'instant où cette sphère contient exactement un quantum $h\nu = \frac{khc}{2\pi}$ d'énergie radiante moyenne et nous écrivons, R étant le rayon de Σ à cet instant

$$(32) \qquad \int_\Sigma \rho\, d\tau = \int_0^{\mathrm{R}} dr \int_0^{\pi} d\theta\, \frac{k^3|a|^2}{4\pi h c r^2}(1 + \cos^2\theta)\, 2\pi r^2 \sin\theta = 1,$$

d'où

$$(33) \qquad |a|^2 = \frac{3hc}{4k^3\mathrm{R}}.$$

Telle est la relation liant le rayon R defini ci-dessus à l'amplitude a du dipôle.

Nous allons maintenant envisager les trois intégrales suivantes dont nous avons signalé l'importance

$$(34)\quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_\Sigma \sum_1^3 E_j^* \left[\mathbf{r}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right]_z A_j\, d\tau + \text{conj.}; \\ I_2 = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_\Sigma [\mathbf{E}^*\mathbf{A}]_z\, d\tau + \text{conj.} \qquad I_3 = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_\Sigma V^* H_z\, d\tau + \text{conj.} \end{cases}$$

Les intégrales analogues se rapportant aux axes ox et oy sont nulles comme on le démontre aisément. Avec le choix *a* des potentiels, le calcul de $\frac{1}{c}[\mathbf{E}^*\mathbf{A}]$ donne

$$(35)\quad \frac{1}{c}[\mathbf{E}^*\mathbf{A}] + \text{conj.} = \frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{ik^3}{c}\{[\mathbf{P}^*\mathbf{P}] - (\mathbf{n}\mathbf{P}^*)[\mathbf{n}\mathbf{P}]\} + \text{conj.},$$

d'où, pour la composante z d'après (20) et (33),

$$(36)\quad \begin{aligned} \frac{1}{c}[\mathbf{E}^*\mathbf{A}]_z + \text{conj.} &= \pm\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{2k^3}{c}|a|^2(1+\cos^2\theta) \\ &= \pm\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{3h}{2R}(1+\cos^2\theta). \end{aligned}$$

Avec le choix *b* des potentiels, on trouve

$$(37)\quad \frac{1}{c}[\mathbf{E}^*\mathbf{A}]_z + \text{conj.} = \frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{ik^3}{c}\{[\mathbf{P}^*\mathbf{P}] - 2(\mathbf{n}\mathbf{P})^*[\mathbf{n}\mathbf{P}]\} + \text{conj.},$$

d'où, pour la composante z,

$$(38)\quad \frac{1}{c}[\mathbf{E}^*\mathbf{A}]_z + \text{conj.} = \pm\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{4k^3}{c}|a|^2\cos^2\theta = \pm\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{3h}{R}\cos^2\theta.$$

Intégrons dans la sphère Σ; il vient

$$(39)\quad \begin{cases} \text{avec le choix } a \text{ des potentiels} \quad I_2 = \pm\dfrac{h}{2\pi}, \\ \quad\text{»}\qquad b \qquad\text{»}\qquad\qquad I_2 = \pm\dfrac{h}{4\pi}. \end{cases}$$

Passons maintenant au calcul de I_3. Avec les potentiels a, on a

$$(40)\quad \frac{1}{c}V^*\mathbf{H} + \text{conj.} = -\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{ik^3}{c}(\mathbf{n}\mathbf{P}^*)[\mathbf{n}\mathbf{P}^*] + \text{conj.},$$

d'où, pour la composante z,

$$(41)\quad \frac{1}{c}V^*H_z + \text{conj.} = \mp\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{2k^3}{c}|a|^2(1-\cos^2\theta) = \mp\frac{1}{16\pi^2 r^2}\frac{3h}{2R}\sin^2\theta.$$

Avec le choix b des potentiels, on a évidemment

$$\frac{1}{c}\mathrm{V}^*\mathbf{H} = 0. \tag{42}$$

En intégrant dans Σ, on obtient donc

$$(43)\quad \begin{cases} \text{avec le choix } a \text{ des potentiels} & \mathrm{I}_3 = \mp\dfrac{h}{4\pi}, \\ \quad \text{»} \qquad b \qquad \text{»} & \mathrm{I}_3 = 0. \end{cases}$$

Pour calculer enfin I_1, nous aurons à considérer l'expression

$$\frac{1}{c}\sum_{1}^{3}{}_j \mathrm{E}_j^*\left[\mathbf{r}\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right]\mathbf{A}_j + \text{conj}.$$

On se rend compte facilement que les seuls termes non nuls de cette expression proviennent des dérivations des composantes de $\mathbf{n}$: elle est donc nulle avec le choix a des potentiels puisque alors $\mathbf{A}$ ne dépend pas de $\mathbf{n}$. Avec le choix b des potentiels, on trouve

$$\frac{1}{c}\sum_{1}^{3}{}_j \mathrm{E}_j^*\left[\mathbf{r}\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right]_z \mathrm{A}_j + \text{conj}. = \frac{1}{16\pi^2 r^2}\,\frac{ik^3}{c}(\mathbf{n}\,\mathbf{P})[\mathbf{P}^*\mathbf{n}] = -\frac{1}{c}\mathrm{V}^*\mathbf{H}. \tag{44}$$

On a donc en intégrant dans Σ

$$(45)\quad \begin{cases} \text{avec le choix } a \text{ des potentiels} & \mathrm{I}_1 = 0, \\ \quad \text{»} \qquad b \qquad \text{»} & \mathrm{I}_1 = \pm\dfrac{h}{4\pi}. \end{cases}$$

Finalement, rassemblant les résultats (39), (43) et (45), nous obtenons

$$(46)\quad \begin{cases} \text{avec le choix } a \text{ des potentiels} & \mathrm{I}_1 = 0, & \mathrm{I}_2 = \pm\dfrac{h}{2\pi}, & \mathrm{I}_3 = \mp\dfrac{h}{2\pi}, \\ \quad \text{»} \qquad b \qquad \text{»} & \mathrm{I}_1 = \pm\dfrac{h}{4\pi}, & \mathrm{I}_2 = \pm\dfrac{h}{4\pi}, & \mathrm{I}_3 = 0. \end{cases}$$

Or la valeur moyenne dans le temps du moment d'impulsion du rayonnement d'après la théorie classique est

$$(47)\quad \begin{cases} \overline{(\mathrm{M}_z)}_{\mathrm{C}l} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \text{une intégrale de surface qui est nulle } (^1), \\ \overline{(\mathrm{M}_z)}_{\mathrm{C}l} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \end{cases}$$

(1) *Voir* HUMBLET, p. 593.

tandis que la composante z du moment d'impulsion en Mécanique ondulatoire du photon est

$$M_z = I_1 + I_2 + I_3, \tag{48}$$

I_1 représentant le moment orbital, $I_2 + I_3$ le spin. D'après les propriétés de l'onde dipolaire, les grandeurs $\overline{(M_z)}_{cl}$ et M_z doivent être égales à $\pm \frac{h}{2\pi}$, moment d'impulsion perdu par le dipôle lors de l'émission du quantum $h\nu$. Or, on a

$$(49) \quad \begin{cases} \text{avec le choix } a \text{ des potentiels} & \overline{(M_z)}_{cl} = \pm \frac{h}{2\pi}, \quad M_z = \pm \frac{h}{4\pi}, \\ \text{«} \qquad b \qquad \text{«} & \overline{(M_z)}_{cl} = \pm \frac{h}{2\pi}, \quad M_z = \pm \frac{h}{2\pi}. \end{cases}$$

Les valeurs de $\overline{(M_z)}_{cl}$ sont insensibles au choix des potentiels, comme cela devait être d'après l'invariance de jauge : elles sont égales à $\pm \frac{h}{2\pi}$ comme prévu. Au contraire, les valeurs de M_z dépendent du choix des potentiels parce que la Mécanique ondulatoire du photon n'admet pas l'invariance de jauge : seul le choix b des potentiels nous fournit la valeur correcte $\pm \frac{h}{2\pi}$. Ce fait a été signalé, il y a quelques années, par M. Géhéniau dans sa thèse.

Donc, pour obtenir en Mécanique ondulatoire du photon, la valeur correcte du moment d'impulsion d'une onde dipolaire circulairement polarisée, il faut adopter les potentiels qui représentent une onde ***purement transversale*** débarrassée de toute onde longitudinale.

Au premier abord, l'adoption des potentiels b de préférence aux potentiels a peut paraître soulever des difficultés. En effet, on est habitué dans la théorie des potentiels retardés à calculer le phénomène de rayonnement dipolaire en partant des formules

$$V = \iiint \frac{[\rho]}{r} d\tau \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \iiint \frac{[\rho \mathbf{v}]}{r} d\tau, \tag{50}$$

où les quantités entre crochets sont les quantités retardées de $-\frac{r}{c}$. Or ce mode de calcul conduit aux potentiels a qui pourraient ainsi, abstraction faite de l'invariance de jauge, paraître avoir une réalité physique plus grande que les potentiels b contrairement à notre conclusion. Mais il faut remarquer qu'aujourd'hui la théorie classique de l'émission des rayonnements fondée sur les formules (50) doit être remplacée par la théorie quantique de l'émission, où l'émission des

ondes transversales et celles des ondes longitudinales apparaissent comme des processus quantiques *indépendants*. C'est là un aspect du fait (bien connu de ceux qui ont étudié le principe de correspondance) que la théorie classique lie ensemble des processus que la théorie quantique considère comme indépendants.

Les potentiels a peuvent d'ailleurs s'écrire sous la forme

$$(51)\quad \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}_{tr} + \mathbf{A}_{l} = \dfrac{ik}{4\pi r} e^{-ikr}\big(\mathbf{P} - (\mathbf{n}\,\mathbf{P})\,\mathbf{n}\big)e^{ikct} + \dfrac{ik}{4\pi r} e^{-ikr}(\mathbf{n}\,\mathbf{P})\mathbf{n}\,e^{ikct}, \\ V = V_{tr} + V_{l} = 0 + \dfrac{ik}{4\pi r} e^{-ikr}(\mathbf{n}\,\mathbf{P})\,e^{ikct}, \end{cases}$$

et l'émission des ondes transversales et longitudinales caractérisées respectivement par les potentiels $\mathbf{A}_{tr}$, V_{tr} et $\mathbf{A}_{l}$, V_{l} doivent être des processus quantiques indépendants. L'onde dipolaire lumineuse émise lors d'une transition quantique du dipôle, onde qui emporte le moment d'impulsion $\pm \frac{h}{2\pi}$ perdu par le dipôle, est donc caractérisée par les potentiels $\mathbf{A}_{tr}$ et $V_{tr} = 0$ et ceci paraît justifier le point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon.

Pour compléter le calcul des grandeurs relatives à l'onde dipolaire en Mécanique ondulatoire du photon, notons que l'on obtient, quel que soit le choix a ou b des potentiels

$$(52)\quad \begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{2\pi i}{h}\left\{[\mathbf{A}^{*}\,\mathbf{H}] + V^{*}\mathbf{E}\right\} + \text{conj.} \\ &= \frac{4\pi k^{3}}{h}\,\frac{1}{16\pi^{2}r^{2}}\left[\,|\mathbf{P}|^{2} - |(\mathbf{n}\,\mathbf{P})|^{2}\right]\mathbf{n} = \rho c \mathbf{n}, \end{aligned}$$

comme on pouvait s'y attendre, puis

$$(53)\quad \sigma_{4} = \frac{1}{c}(\mathbf{A}^{*}\,\mathbf{H}) + \text{conj.} = \frac{4k^{3}}{c}\,\frac{1}{16\pi^{2}r^{2}}\,|a|^{2}\cos\theta = \left|\vec{\sigma}\right|.$$

La dernière égalité est en accord (pour $v = c$) avec la formule $\sigma_{4} = \left|\vec{\sigma}\right|\frac{v}{c}$ valable pour l'onde plane, ce qui s'explique si l'on remarque qu'à grande distance de l'origine l'onde dipolaire est assimilable à une onde plane.

5. Remarque sur le spin du photon. — M. A. Kastler (¹) a montré que la lumière émise perpendiculairement au champ par une source

(¹) *Journ. de Phys.*, sér. VII, t. II, 1931, p. 159-164.

placée dans un champ magnétique uniforme peut être absorbée par une autre source placée dans un champ magnétique parallèle, mais de sens opposé : il en tirait la conclusion que le photon n'a pas de spin. Cette conclusion serait valable si l'on avait le droit de se représenter le spin du photon comme une rotation interne d'un petit objet presque ponctuel. Mais cette représentation n'est pas admissible. Pour le photon comme pour l'électron de Dirac, le spin doit être défini plus abstraitement en introduisant les opérateurs de spin, les valeurs possibles des composantes et leurs probabitités respectives. De plus, on doit tenir compte du fait que la conservation du moment d'impulsion est toujours défini par rapport à un point et porte toujours sur la somme du moment orbital et du spin. Si l'on tient compte de ces remarques, on voit que les intéressantes expériences de M. Kastler prouvent non point la non-existence du spin du photon, mais seulement l'impossibilité d'en conserver la représentation grossière par la rotation interne d'un corpuscule.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIES SUPERQUANTIFIÉES.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DE LA SECONDE QUANTIFICATION.

1. **Bases de la théorie.** — La théorie de la seconde quantification constitue une méthode pour traiter dans le cadre de l'espace ordinaire à trois dimensions les problèmes où interviennent des ensembles de particules de même nature physique.

On sait que pour développer la dynamique des ensembles de particules en interaction, la Mécanique ondulatoire a dû envisager une propagation d'ondes dans un espace de configuration à 3N dimensions, N étant le nombre des particules de l'ensemble. De plus, quand on a affaire à des particules de même nature physique, on est amené, pour être en accord avec l'expérience, à ne conserver qu'une partie des solutions possibles de l'équation d'ondes de l'espace de configuration, savoir pour certaines catégories de particules (photons, mésons, particules α, certains noyaux, etc.) les solutions à caractère symétrique, c'est-à-dire telles qu'elles ne sont pas modifiées quand on permute le rôle de deux particules, et pour certaines autres catégories de particules (électrons, protons, neutrons, certains noyaux, etc.) les solutions à caractère antisymétrique, c'est-à-dire telles qu'elles changent de signe pour toute permutation du rôle des deux particules. On peut démontrer que les particules de la seconde espèce sont soumises au principe d'exclusion de Pauli et suivent la statistique de Fermi-Dirac tandis que celles de la première espèce échappent au principe de Pauli et suivent la statistique de Bose-Einstein. De plus, l'expérience prouve que les particules de la première espèce ont un spin de la forme $n\frac{h}{2\pi}$

(n entier) et celles de la seconde espèce un spin de la forme $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$, fait d'un intérêt capital que l'on parvient à interpréter en tenant compte de la nature simple ou complexe des particules et qui joue un rôle fondamental en théorie du Noyau [1].

Ainsi, la Mécanique ondulatoire des systèmes de particules de même nature ne peut représenter l'évolution d'un tel système qu'en se plaçant dans un espace de configuration à caractère abstrait et en introduisant, *a priori*, des règles qui limitent le choix des fonctions d'onde suivant la nature des particules.

La méthode de quantification cherche, au contraire, à représenter l'évolution d'un système de particules de même nature dans le cadre de l'espace physique à trois dimensions, mais, pour y parvenir, il est obligé d'attribuer à la fonction Ψ le caractère d'un opérateur, reperdant ainsi au point de vue intuitif du côté de la fonction d'onde ce qu'elle gagne du côté de l'espace. Elle se développe d'ailleurs différemment suivant qu'il s'agit de particules obéissant ou n'obéissant pas au principe de Pauli. Comme nous nous occupons ici des particules de spin 1 et spécialement des photons, nous fixerons surtout notre attention sur la forme de la seconde quantification qui est applicable aux particules à état symétrique échappant au principe d'exclusion.

2. Caractère complémentaire des amplitudes et des phases quand on représente un ensemble de particules de même nature dans l'espace physique à trois dimensions. — Nous allons commencer l'exposé de la seconde quantification par de très importantes considérations sur la représentation d'un ensemble de N particules dans le cadre de l'espace à trois dimensions.

Si nous cherchons à représenter un tel ensemble par une onde Ψ dans l'espace ordinaire, il sera naturel de *normer* cette onde Ψ en posant

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 \, d\tau = N, \tag{1}$$

et de supposer que, si l'on a

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i, \tag{2}$$

---

[1] Sur toutes ces questions, on pourra consulter le livre de l'auteur : *De la Mécanique ondulatoire à la théorie du Noyau*, I, Chap. II, III et IV, Hermann, Paris, 1943.

les φ_i étant les fonctions propres d'un opérateur A, le nombre probable des particules pour lesquelles une détermination de la grandeur A donnera $A = \alpha_i$ sera donné par $|c_i|^2$. L'on aura donc $\sum_i |c_i|^2 = N$.

Considérons maintenant deux grandeurs observables A et B dont les valeurs propres et les fonctions propres sont respectivement α_i, φ_i et β_k, χ_k. Le système des φ_i et celui des χ_k forment chacun un système complet de fonctions orthonormales et le passage de l'un à l'autre est l'analogue dans l'espace fonctionnel d'un changement de coordonnées orthogonales dans l'espace ordinaire.

On a donc des formules de transformation du type

$$(3) \qquad \varphi_i = \sum_k s_{ki}\chi_k \qquad \left(\sum_k s^*_{ki} s_{kj} = \delta_{ij}\right),$$

où les s_{kj} sont les éléments d'une matrice s orthogonale du domaine complexe, c'est-à-dire unitaire. Si une fonction Ψ se développe suivant les φ_i sous la forme

$$(4) \qquad \Psi = \sum_i c_i \varphi_i,$$

on aura ainsi

$$(5) \qquad \Psi = \sum_i c_i \sum_k s_{ki}\chi_k = \sum_k d_k \chi_k,$$

avec

$$(6) \qquad d_k = \sum_i s_{ki} c_i,$$

et cette formule donne l'expression des coefficients du développement du Ψ suivant les χ_k en fonction des coefficients du développement selon les φ_i. On vérifie aisément que la condition (1) de normalisation imposée au Ψ entraîne

$$(7) \qquad \sum_i |c_i|^2 = \sum_k |d_k|^2 = N.$$

Ceci posé, soit un ensemble de N particules de même nature sans interactions mutuelles. Nous voulons représenter cet ensemble par une fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ normée par (1).

A l'instant initial, l'onde Ψ, qui représente donc un nuage de particules, occupe une certaine région limitée R de l'espace à trois dimensions et se déplace dans une certaine direction. Nous supposons

que ce nuage arrive sur un dispositif D qui permet d'attribuer, par la constatation d'un phénomène observable, une valeur bien déterminée à une grandeur attachée à une particule. Le dispositif D permettra donc de dire que, pour chaque valeur propre β_k de B, il y a n_k des N particules pour lesquelles B aura la valeur β_k.

Supposons encore que sur le trajet entre R et D puisse être placé un dispositif D′ permettant d'assigner une valeur déterminée à une autre grandeur A attachée à chaque particule, valeur qui sera nécessairement l'une des valeurs propres α_l de l'opérateur A. Nous nous proposons d'évaluer le nombre des particules qui, après passage à travers le dispositif D, posséderont certainement leur grandeur B égale à β_k, sachant que l'onde Ψ à l'état initial où elle occupe la région R a la forme

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_l c_l \varphi_l = \sum_{l,k} s_{kl} c_l \chi_k = \sum_k d_k \chi_k. \tag{8}$$

les c_l et d_k vérifiant la relation (7).

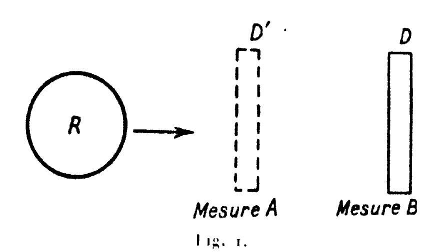


Fig. 1.

Nous allons maintenant distinguer deux cas.

1° Le dispositif D′ n'est pas interposé sur le trajet R → D.

En étendant à l'onde Ψ normée par (1) les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, on doit admettre que le nombre probable des particules qui, après action sur D, posséderont leur grandeur B égale à β_k est donné par

$$n_k = |d_k|^2 = \left|\sum_l s_{kl} c_l\right|^2. \tag{9}$$

ce qui donne $\sum_k n_k = \mathrm{N}$ comme il se doit.

informations n_k ; the population ...

2° Le dispositif D' est interposé entre R et D : il laisse passer toutes les particules se dirigeant vers D, mais permet d'assigner à n_1 d'entre elles la valeur α_1 pour la grandeur A, à n_2 d'entre elles la valeur α_2, etc. On doit alors avoir $n_i = |c_i|^2$ et les n_i particules pour lesquelles on sait, après leur passage à travers D', que A est égale à α_i auront entre D' et D une onde Ψ se réduisant à $c_i \varphi_i$. Le nombre de ces particules qui, lors de leur action sur D, se révèlent comme ayant leur grandeur B égale à β_k s'obtient en remarquant que, leur onde étant

$$(10) \qquad \Psi = c_i \varphi_i = \sum_k s_{ik} c_i \chi_k$$

ce nombre doit être égal à $n_{ik} = |s_{ki} c_i|^2$. Le nombre total probable n_k des N particules incidentes qui, après passage dans D, auront leur grandeur B égale à β_k est donc

$$(11) \qquad n_k = \sum_i n_{ik} = \sum_i |s_{ki} c_i|^2 = \sum_i |s_{ki}|^2 |c_i|^2$$

et l'on aura encore

$$(12) \qquad \sum_k n_k = \sum_i |c_i|^2 \sum_k |s_{ki}|^2 = \sum_i |c_i|^2 \sum_k s_{ik}^{-1} s_{ki} = \sum_i |c_i|^2 = \mathrm{N}.$$

parce que s est une matrice unitaire ($s_{ik}^* = s_{ki}^{-1}$).

Voici maintenant le point essentiel : il existe une différence fondamentale entre les résultats obtenus dans les cas 1° et 2°. En effet, chaque c_i est une grandeur complexe qu'on peut donc écrire $|c_i| e^{i\theta_i}$, θ_i étant l'argument de c_i. Or la grandeur $\left|\sum_i s_{ki} c_i\right|^2$ de la formule (9) dépend des arguments des c_i car elle vaut

$$(13) \qquad \sum_i |s_{ik}|^2 |c_i|^2 + \sum_{ij}^{i \neq j} s_{ki}^* |c_i| s_{kj} |c_j| e^{i(\theta_j - \theta_i)}.$$

Autrement dit, cette probabilité dépend des différences de phase entre les composantes du développement du Ψ suivant les fonctions propres de A. Il y a alors *interférences des probabilités*, circonstance capitale tout à fait caractéristique de la Mécanique ondulatoire. Au contraire, dans la formule (11) correspondant au cas 2°, n_k ne dépend plus des arguments des c_i, mais seulement de leur module : les différences de phase entre les composantes du développement du Ψ suivant les fonctions

propres de A n'interviennent plus et il n'y a plus d'interférences des probabilités.

Or, ce qui distingue physiquement les cas 1° et 2°, c'est l'intervention dans le second cas du dispositif D′ permettant d'assigner à A une valeur bien déterminée et, par suite, de répartir les N particules incidentes en groupes correspondant aux diverses valeurs possibles de A. Nous parvenons ainsi à la conclusion capitale suivante : *quand il se produit un phénomène observable permettant de répartir les* N *particules incidentes entre les divers états propres correspondant à une même grandeur* A, *les relations de phase entre les composantes du développement du* Ψ *suivant les fonctions propres de* A *se trouvent par là même complètement effacées.* La connaissance des $|c_i|^2$ est donc incompatible avec celle des θ_i : quand on cherche à représenter un ensemble de N particules de même nature par une onde Ψ dans l'espace physique à trois dimensions, l'amplitude et la phase d'une même composante spectrale du Ψ sont donc des *grandeurs complémentaires* au sens de Bohr et, suivant les idées générales de la Mécanique ondulatoire, on doit représenter ces grandeurs par des opérateurs *qui ne commutent pas.* C'est ce que nous ferons plus loin.

Remarquons que les considérations qui précèdent s'appliquent seulement aux particules non soumises au principe de Pauli puisque nous avons supposé qu'il pouvait y avoir un nombre quelconque de particules par état.

Notons aussi que les raisonnements développés plus haut se rattachent étroitement à l'idée précisée tout d'abord par M. von Neumann suivant laquelle la mesure d'une grandeur A a pour effet de transformer le *cas pur* représenté par la fonction d'onde Ψ initiale en un *mélange* de cas purs (¹).

3. **La seconde quantification pour un ensemble de particules à états symétriques (Dirac).** — Dans notre représentation d'un ensemble de N particules par une seule fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ normée par (1), nous avons admis implicitement qu'il pouvait y avoir un nombre entier quelconque n_i de particules dans chaque état φ_i. Nous savons qu'une telle hypothèse n'est valable que pour les particules à états symétriques suivant la statistique de Bose-Einstein. Nous allons donc pour l'instant nous borner à considérer ce genre de particules. Nous

---

(¹) *Voir* Bauer et London, *La théorie de l'observation en Mécanique quantique* (*Act. scientifiques*, 775, Hermann, 1939).

supposerons de plus que nous nous intéressons seulement à la mesure de la grandeur *énergie* et par suite que nous développons toujours la fonction d'onde Ψ suivant les fonctions propres de l'opérateur hamiltonien H, opérateur défini pour une particule considérée isolément.

Soit donc un ensemble de N particules indépendantes obéissant à la statistique de Bose. Si $\Psi(x, y, z, t)$ représente cet ensemble dans l'espace à trois dimensions, on écrira le développement de cette fonction d'onde suivant les fonctions propres orthonormales de l'opérateur hamiltonien sous la forme

$$(14)\qquad \Psi = \sum_i c_i \Psi_i,$$

formule où nous supposons que chaque Ψ_i contient le facteur exponentiel $e^{\frac{2\pi i}{h}E_i t}$. Les c_i sont des constantes complexes qu'on peut écrire en mettant en évidence module et argument

$$(15)\qquad c_i = |c_i|\, e^{i\theta_i} = e^{i\theta_i}\, |c_i|.$$

Nous admettrons que le nombre n_i des particules qu'une mesure de l'énergie montrera se trouver dans l'état d'énergie E_i est

$$(16)\qquad n_i = |c_i|^2 = c_i^* c_i = c_i c_i^*.$$

Dans les formules (14) et (16), comme nous l'avons indiqué, l'ordre des facteurs est indifférent puisque, jusqu'ici, nous considérons les c_i comme des grandeurs numériques complexes ordinaires. Nous allons être amenés maintenant à considérer les c_i et c_i^* comme des opérateurs et alors l'ordre des facteurs cessera d'être indifférent. C'est pourquoi nous allons convenir de toujours écrire les formules précédentes sous la forme

$$(17)\qquad c_i = e^{i\theta_i}\, |c_i|, \qquad n_i = c_i^* c_i.$$

Nous avons montré que les grandeurs n_i et θ_i se comportent comme des grandeurs complémentaires au sens de Bohr, puisque la détermination simultanée des nombres de répartition n_i et des phases θ_i est impossible. Mais il ressort des principes de la Mécanique ondulatoire que, quand deux grandeurs sont complémentaires (comme le sont deux grandeurs canoniquement conjuguées p_i et q_i), si l'une est considérée comme une grandeur numérique, l'autre doit être regardée comme

un opérateur égal, à un facteur près, à l'opérateur ***dérivation par rapport à la première grandeur***. Ainsi q_i et p_i étant l'une des coordonnées et le moment de Lagrange conjugué, si l'on considère q_i comme une variable numérique, p_i doit être assimilé à l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}$. L'on peut d'ailleurs développer aussi les formules de la Mécanique ondulatoire en considérant p_i comme une variable numérique et en assimilant q_i à l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial p_i}$.

Nous sommes ainsi amenés, si nous considérons les n_i comme des variables numériques, à assimiler θ_i à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial n_i}$ multiplié par un facteur constant que nous choisirons égal à $\frac{1}{i}$, ce choix devant être justifié par l'exactitude de ses conséquences ([1]). Nous supposons donc ici qu'*a priori* n_i est une variable continue par rapport à laquelle on peut définir l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial n_i}$: il nous restera à montrer qu'en fait les variables n_i ne peuvent prendre, conformément à leur sens physique, que des valeurs quantifiées *entières*. Avec l'ordre des facteurs adopté en (17), nous poserons

$$c_i = e^{\frac{\partial}{\partial n_i}}\sqrt{n_i}. \tag{18}$$

Comme $c_i^* = e^{-i\theta_i}|c_i|$, la connaissance simultanée de c_i et de c_i^* équivaudrait à celle de n_i et de θ_i, ce qui est impossible. On en conclut que c_i et c_i^* représentent des grandeurs complémentaires dont la connaissance simultanée exacte est impossible : donc c_i^* doit, lui aussi, être transformé en un opérateur qui ne doit pas commuter avec l'opérateur (18). Comme nous devons avoir $n_i = c_i^* c_i$ et qu'il est naturel d'admettre la relation

$$e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}e^{\frac{\partial}{\partial n_i}} = 1, \tag{19}$$

([1]) Remarquons que le fait de poser $(\theta_i)_{op} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial n_i}$ entraîne la relation de commutation

$$[\theta_i, n_i] = \frac{1}{i},$$

et par suite la relation d'incertitude

$$\Delta\theta_i\,\Delta n_i \simeq 1,$$

qui exprime l'impossibilité de connaître simultanément la phase d'une onde monochromatique et le nombre des particules qui lui sont associées.

nous sommes amenés à poser

$$c_i^* = \sqrt{n_i}\, e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}. \tag{20}$$

Il est extrêmement important de noter qu'une fois transformés en opérateur par les définitions (18) et (20), les symboles c_i et c_i^* *ne représentent plus des quantités conjuguées au sens usuel du mot* [1].

Une des caractéristiques essentielles de deux grandeurs complémentaires, c'est que le commutateur des opérateurs correspondants n'est pas nul, ce fait traduisant dans le formalisme de la nouvelle Mécanique l'impossibilité de mesurer simultanément avec précision les deux grandeurs. Ici nous devons donc avoir pour les opérateurs c_i et c_i^*

$$[c_i^*, c_i] \equiv c_i^* c_i - c_i c_i^* \neq 0. \tag{21}$$

Pour voir, s'il en est ainsi avec (18) et (20), nous devons préciser la définition des opérateurs $e^{\pm\frac{\partial}{\partial n_i}}$ en posant

$$e^{\pm\frac{\partial}{\partial n_i}} = 1 \pm \frac{\partial}{\partial n_i} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial n_i^2} \pm \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial n_i^3} + \ldots + (\pm 1)^p \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial n_i^p} + \ldots, \tag{22}$$

c'est-à-dire en nous servant du développement usuel de e^x. Avec la définition (22) on vérifie aisément que la relation (19) est satisfaite.

Considérons alors une fonction continue et indéfiniment dérivable $\varphi(n_1, n_2, \ldots)$ des variables numériques n_i. Nous aurons

$$\begin{aligned} e^{\pm\frac{\partial}{\partial n_i}} \varphi(n_1, n_2, \ldots) = \Big[1 \pm \frac{\partial}{\partial n_i} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial n_i^2} \\ + \ldots + (\pm 1)^p \frac{1}{p!}\frac{\partial}{\partial n_i^p} + \ldots, \Big] \varphi(n_1, n_2, \ldots). \end{aligned} \tag{23}$$

Or la formule de Taylor appliquée à la fonction φ nous donne

$$\begin{aligned} \varphi(n_1, \ldots, n_i + \delta n_i, \ldots) = \varphi(n_1, \ldots, n_1, \ldots) \\ + \delta n_i \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\delta n_i^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n_i^2} + \ldots + \frac{1}{p!}\delta n_i^p \frac{\partial^p \varphi}{\partial n_i^p} + \ldots, \end{aligned} \tag{24}$$

où les dérivées au second membre sont prises pour les valeurs $n_1, \ldots, n_i, \ldots$ des variables. En faisant successivement dans (24)

---

[1] Cependant c_k et c_k^* sont des opérateurs adjoints dans l'espace des n, d'où résulte que $c_k + c_k^*$ est hermitien dans cet espace.

$\delta n_i = 1$ et $\delta n_i = -1$, on obtient

$$(25)\quad \begin{cases} e^{\frac{\partial}{\partial n_i}}\varphi(n_1, \ldots, n_i, \ldots) = \varphi(n_1, \ldots, n_i+1, \ldots) \\ e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}\varphi(n_1, \ldots, n_i, \ldots) = \varphi(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots). \end{cases}$$

L'opérateur $e^{\frac{\partial}{\partial n_i}}$ appliqué à une fonction φ des variables n_i a donc pour effet d'augmenter d'une unité la valeur de l'argument n_i dans l'expression de φ, tandis que l'opérateur $e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}$ a, au contraire, pour effet de diminuer cette valeur d'une unité.

Formons maintenant le commutateur de c_i^* et de c_i; nous obtenons

$$(26)\quad [c_i^*, c_i] = n_i - e^{\frac{\partial}{\partial n_i}} n_i e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}.$$

Appliquons l'opérateur (26) à une fonction φ des n_i; il vient

$$(27)\quad (c_i^* c_i - c_i c_i^*)\varphi(n_1, \ldots, n_i, \ldots) = n_i\varphi - e^{\frac{\partial}{\partial n_i}} n_i e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}\varphi = -\varphi(n_1, \ldots, n_i, \ldots)$$

car

$$(28)\quad \begin{aligned} e^{\frac{\partial}{\partial n_i}} n_i e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}\varphi(n_1, \ldots, n_i, \ldots) &= e^{\frac{\partial}{\partial n_i}} n_i \varphi(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots) \\ &= (n_i+1)\varphi(n_1, \ldots, n_i, \ldots). \end{aligned}$$

On peut donc écrire l'égalité opératorielle

$$(29)\quad [c_i^*, c_i] = -1.$$

Comme nous n'avons aucune raison de supposer que n_i et θ_k pour $i \neq k$ ne soient pas simultanément mesurables, nous devons penser que c_i et c_k^* commutent et poser

$$(30)\quad [c_i^*, c_k] = 0 \qquad (i \neq k).$$

Les règles de commutation des opérateurs c_i et c_i^* peuvent donc se résumer par la formule

$$(31)\quad [c_i^*, c_k] = -\delta_{ik}.$$

Nous y ajouterons les règles suivantes dont la vérification est aisée :

$$(32)\quad [c_i^*, c_k^*] = 0, \qquad [c_i, c_k] = 0,$$

et nous aurons ainsi obtenu l'ensemble des règles de commutation pour la seconde quantification des particules à états symétriques [1].

4. Autre manière de trouver les règles de commutation des c_i. — Nous allons maintenant développer une autre manière, très importante par ses conséquences, de retrouver les règles précédentes.

Partons de l'idée que si, dans une théorie non quantifiée, p_i est la grandeur canoniquement conjuguée de q_i, la quantification consiste à remplacer p_i et q_i pour des opérateurs tels que

$$(33) \qquad [p_i, q_k] = p_i q_k - q_k p_i = \frac{h}{2\pi i}\delta_{ik}.$$

Il suffira alors de montrer qu'en Mécanique ondulatoire non superquantifiée, les variables $\frac{h}{2\pi i} c_i^*$ et c_i doivent être considérées comme canoniquement conjuguées pour voir que la seconde quantification doit consister à remplacer les nombres c_i^* et c_i par des opérateurs tels que

$$(34) \qquad \frac{h}{2\pi i} c_i^* c_k - c_k \frac{h}{2\pi i} c_i^* = \frac{h}{2\pi i}\delta_{ik}$$

formule équivalente à l'équation (31).

---

[1] On dit d'une façon générale qu'un opérateur A^+ est l'*adjoint* d'un opérateur A dans un domaine D si l'on a

$$\int_D f^* A g \, d\tau = \int_D g A^+ f^* \, d\tau,$$

f et g étant deux fonctions continues et uniformes dans D et nulles aux limites de D. Cette définition entraine que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit hermitien est qu'il soit son propre adjoint, c'est-à-dire que $A^+ = A$.

Avec les définitions (18) et (20) de $(c_i)_{op}$ et de $(c_i^*)_{op}$, on trouve aisément

$$\int f^*(n_1, n_2, \ldots)(c_i)_{op} g(n_1, n_2, \ldots)\, dn_1, dn_2, \ldots$$
$$= \int g(n_1, n_2, \ldots)(c_i^*)_{op} f^*(n_1, n_2, \ldots)\, dn_1, dn_2, \ldots,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace des n et f et g étant des fonctions uniformes et continues des n s'annulant à l'infini. On a donc

$$(c_i^*)_{op} = (c_i)_{op}^+,$$

d'où l'emploi par beaucoup d'auteurs de la notation c_i^+ au lieu de c_i^* en seconde quantification.

Comme $(c_i^*)_{op} \neq (c_i)_{op}$, l'opérateur c_i n'est pas hermitien et ne correspond donc pas à une observable au sens de M. Dirac.

Pour prouver que $\frac{h}{2\pi i} c_i^*$ et c_i sont canoniquement conjuguées, nous devons rappeler brièvement ce qu'on nomme, en Mécanique ondulatoire non superquantifiée, la méthode de variation des constantes.

Soit $H^{(0)}$ l'opérateur hamiltonien d'un système qui n'est soumis à aucune action extérieure tel que l'ensemble de nos particules indépendantes. Cet hamiltonien admet des valeurs propres $E_1, \ldots, E_i, \ldots$, et des fonctions propres $\Psi_1^{(0)}, \ldots, \Psi_i^{(0)}, \ldots$, et l'équation d'onde s'écrit

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H^{(0)}\Psi. \tag{35}$$

La fonction d'onde Ψ est une solution de cette équation qu'on peut développer sous la forme

$$\Psi = \sum_i c_i^{(0)} \Psi_i^{(0)}, \tag{36}$$

les $c_i^{(0)}$ étant des constantes complexes indépendantes du temps.

Supposons maintenant qu'à partir d'une époque t_0, on soumette le système à l'action d'un champ extérieur dérivant du potentiel $V(q_1, q_2, \ldots, t)$. L'équation des ondes deviendra

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H^{(0)}\Psi + V(t)\Psi, \tag{37}$$

où Ψ pourra toujours à chaque instant se développer suivant le système des fonctions propres $\Psi_i^{(0)}$ de l'hamiltonien non perturbé $H^{(0)}$. Seulement maintenant, sous l'action du potentiel perturbateur $V(t)$, les coefficients du développement du Ψ sont variables avec le temps et l'on aura

$$\Psi = \sum_i c_i(t)\Psi_i^{(0)}. \tag{38}$$

En substituant dans (37) et en se souvenant que les $\Psi_i^{(0)}$ sont solutions de l'équation (35), on trouve

$$\frac{h}{2\pi i}\sum_i \frac{dc_i}{dt}\Psi_i^{(0)} = \sum_i c_i(t)V(t)\Psi_i^{(0)}. \tag{39}$$

Multiplions Ψ_j^* et intégrons dans D, domaine de variation des variables du problème : il vient, en tenant compte des conditions d'orthonormalité des $\Psi_i^{(0)}$, les équations de variation des constantes de Dirac

$$\frac{dc_j}{dt} = \frac{2\pi i}{h}\sum_i V_{ji}^{(0)}(t)c_i(t) \tag{40}$$

avec

(41) $$V_{ji}^{(0)}(t) = \int_D \Psi_j^{(0)*} V(t) \Psi_i^{(0)} d\tau,$$

$V_{ij}^{(0)}(t)$ est donc l'élément d'indices ji de la matrice engendrée par l'opérateur $V(t)$ dans le système des fonctions propres de $H^{(0)}$. Si l'on suppose connues les valeurs initiales $c_j(t_0) = c_j^{(0)}$ des c_j, les équations (41) permettent de suivre les variations des $c_j(t)$ au cours du temps sous l'action du potentiel perturbateur $V(t)$.

Il importe pour nous de remarquer que la théorie précédente s'applique au cas du photon, bien que nous ayons défini l'hamiltonien du photon par la formule

(42) $$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\Psi = H\Psi$$

avec l'opérateur $\dfrac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}$ au premier membre. Nous savons, en effet, que pour le photon les fonctions propres de l'énergie, qui sont les ondes planes monochromatiques, doivent être normées par la relation

(43) $$\int_D \Psi_i^{(0)*}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\Psi_i^{(0)}\, d\tau = 1$$

et que l'on vérifie aisément pour $i \neq j$ la relation

(44) $$\int_D \Psi_i^{(0)*}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\Psi_j^{(0)}\, d\tau = 0.$$

Les calculs précédents sont encore valables, $V(t)$ étant le terme que les interactions avec la matière introduisent en supplément dans l'hamiltonien du photon.

En prenant l'équation conjuguée de (40) et en tenant compte de l'hermiticité de la matrice $V^{(0)}$, nous obtenons

(45) $$\frac{dc_j^*}{dt} = \frac{2\pi i}{h}\sum_i V_{ji}^{(0)*}(t)c_i^*(t) = -\frac{2\pi i}{h}\sum_i c_i^*(t)V_{ij}^{(0)}.$$

Introduisons maintenant la fonction bilinéaire suivante des c_i et des c_i^*

(46) $$\mathcal{H}(c_1, \ldots, c_i, \ldots) = \sum_{ij} c_i^*(t)V_{ij}^{(0)}(t)c_j(t).$$

Les équations (40) et (45) peuvent s'écrire

(47) $$\frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c_j^*}, \qquad \frac{dc_j^*}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c_j},$$

à condition de poser

$$c'_j(t) = \frac{h}{2\pi i} c^*_j(t). \tag{48}$$

Les équations (47) ont la même forme que les équations canoniques classiques de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{49}$$

Nous pouvons donc bien considérer $\frac{h}{2\pi i} c^*_i$ comme le moment conjugué de c_i, la fonction $\mathcal{H}$ jouant le rôle de fonction hamiltonienne. Dès lors, comme nous l'avons remarqué, nous sommes ramenés aux règles de commutation des c_i et des c^*_i trouvées au paragraphe précédent.

5. Équation de propagation dans l'espace des *n*. Extension du formalisme de la Mécanique ondulatoire. — Pour passer de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire non superquantifiée, on remplace les équations canoniques (49) par l'équation de propagation

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi(q_1, \ldots, q_k, \ldots, t)}{\partial t} = H\left(q_1, \ldots, q_k, \ldots, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}, \ldots, t\right)\Psi \tag{50}$$

la fonction hamiltonienne $H(q_1, \ldots, q_k, \ldots, p_1, \ldots, p_k, \ldots, t)$ de la Mécanique classique ayant été, comme il est bien connu, transformé en opérateur hamiltonien par la substitution à chaque p_k de l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}$.

De même, pour opérer le passage de la Mécanique ondulatoire non superquantifiée, il est tout indiqué de remplacer les équations canoniques

$$\frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c'_j}, \qquad \frac{dc'_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_j} \tag{47}$$

obtenues plus haut dans la théorie non superquantifiée par l'équation de propagation suivante définie dans l'espace des n

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial R(n_1, \ldots, n_k, \ldots, t)}{\partial t} = \mathcal{H}_{op} R(n_1, \ldots, n_k, \ldots, t) \tag{48}$$

avec

$$\mathcal{H}_{op} = \sum_{ij} V^{(0)}_{ij}(t)(c^*_i)_{op}(c_j)_{op}, \tag{49}$$

les $(c_i^*)_{op}$ et $(c_j)_{op}$ étant définies par les équations (18) et (20). L'opérateur $\mathcal{H}_{op}$ est donc obtenu en substituant dans l'expression non superquantifiée de la fonction hamiltonienne (46) aux grandeurs numériques c_k et c_k^* les opérateurs correspondants définis dans l'espace des n par (18) et (20).

La fonction $R(n_1, \ldots, t)$ est la fonction d'onde dans l'espace des n : en raison du rôle qu'elle va jouer, nous lui donnerons le nom de *fonction de répartition*. Nous la supposerons normée par la formule

$$(50) \qquad \sum_n R^*(n_1, \ldots, t) R(n_1, \ldots, t) = 1,$$

où $\sum_n$ est une sommation étendue à toutes les valeurs des n_k et représentant une intégration dans l'espace des n. L'hermiticité de l'opérateur (49) assure d'ailleurs, comme on le vérifie aisément, la permanence de la condition de normalisation (50), car on tire de (48)

$$(51) \qquad \frac{d}{dt} \sum_n R^* R = 0.$$

Ayant obtenu ainsi une équation de propagation et une fonction d'onde dans l'espace des n, rien ne nous empêche de transposer à cet espace tout le formalisme de la Mécanique ondulatoire. En particulier, l'expression $R^*(n_1, \ldots, t) . R(n_1, \ldots, t) = |R(n_1, \ldots, t|^2$ nous donnera la probabilité pour qu'il y ait n_1 particules dans l'état E_1, n_2 dans l'état E_2, ... Nous verrons tout à l'heure que, conformément à l'idée même de particules, les nombres n_k pour lesquels $|R|^2$ est différent de zéro sont toujours des nombres entiers, ce que nous admettrons dès maintenant.

Comme en Mécanique ondulatoire ordinaire, on peut définir le caractère hermitien d'un opérateur dans l'espace des n et admettre qu'à toute grandeur mesurable de l'espace des n correspond un opérateur linéaire et hermitien dans cet espace. On définira les valeurs propres et les fonctions propres d'un tel opérateur A par une équation aux valeurs propres de la forme

$$(52) \qquad A\varphi_i(n_1, \ldots, n_k, \ldots) = \alpha_i \varphi_i(n_1, \ldots, n_k, \ldots),$$

les φ_i formant dans l'espace des n un système complet de fonctions orthonormales telles que

$$(53) \qquad \sum_n \varphi_i^*(n_1, \ldots, n_k, \ldots) \varphi_i(n_1, \ldots, n_k, \ldots) = 1.$$

Les α_i seront les valeurs propres de la grandeur dans l'espace des n et, si la fonction R se développe sous la forme

$$(54)\qquad R(n_1, \ldots, n_k, \ldots, t) = \sum_i c_i(t)\varphi_i(n_1, \ldots, n_k, \ldots),$$

suivant le système complet des φ_i, la quantité $|c_i(t)|^2$ donnera la probabilité pour qu'une mesure fournisse pour la grandeur A la valeur α_i à l'instant t. Il en résulte que la valeur moyenne de A a les deux expressions équivalentes

$$(55)\qquad \overline{A} = \sum_i \alpha_i |c_i|^2 = \sum_n R^*(n_1, \ldots, t)AR(n_1, \ldots, t).$$

Nous reviendrons plus loin sur la signification et l'importance de ces valeurs moyennes.

Nous devons faire remarquer [1] que les opérateurs c_k et c_k^* ne sont pas des opérateurs hermitiens dans l'espace n et, par suite, ne correspondent pas à des grandeurs mesurables, tandis que les opérateurs

$$(56)\qquad c_k^* c_k = n_k, \qquad \theta_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial n_k}$$

sont, au contraire, hermitiens et correspondent à des grandeurs mesurables. On vérifiera aisément ces affirmations *en tenant bien compte* du fait que c_k et c_k^* ne sont pas des grandeurs conjuguées, mais que chacun d'eux est un opérateur réel. On pourra également vérifier que l'opérateur $c_k + c_k^*$ est hermitien.

Nous noterons encore que l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par (49) peut être remplacé par le suivant

$$(49')\qquad \mathcal{H} = \sum_{ij} [H_{ij}^{(0)} + V_{ij}(t)](c_i^*)_{op}(c_j)_{op},$$

$H_{ij}^{(0)}$ étant l'élément de matrice $\int_0 \Psi_i^{(0)*} H^{(0)} \Psi_j \, d\tau$ formé à l'aide de l'hamiltonien non perturbé $H^{(0)}$. En effet, les $\Psi_i^{(0)}$ étant fonctions propres de $H^{(0)}$, nous avons $H_{ij}^{(0)} = E_i \delta_{ij}$ et par suite (49') ne diffère de (49) que par la seule adjonction des termes $\sum_{ij} E_i \delta_{ij} c_i^* c_j = \sum_j n_j E_j$. La modification de l'hamiltonien a donc pour seul effet de nous obliger à remplacer la fonction R par la fonction $R e^{\frac{2\pi i}{h}\sum_j n_j E_j}$, mais nous savons

[1] *Voir* Note page 89.

qu'une fonction d'onde même normée n'étant jamais définie qu'à un facteur complexe de module unité près, cette modification n'a aucune importance. Nous nous servirons tantôt de l'hamiltonien (49), tantôt de l'hamiltonien (49'), ainsi que des fonctions d'onde correspondantes.

6. La seconde quantification exprime l'existence des particules. — L'opérateur $\mathcal{H}$ de la seconde quantification n'est pas comme l'hamiltonien H de la Mécanique ondulatoire non superquantifiée un opérateur différentiel : il est, en effet, une combinaison linéaire des opérateurs $e^{-\frac{\partial}{\partial n_i}}$ et $e^{\frac{\partial}{\partial n_i}}$ qui, appliqués à une fonction des n augmentent ou diminuent d'une unité la valeur des variables.

Le second membre de l'équation (48) est donc une combinaison linéaire des valeurs de R correspondant à des valeurs des variables n différentes d'une unité. Il en résulte que si $R(n_1, \ldots, n_k, \ldots t)$ n'est à l'instant t_0 différent de zéro que pour les valeurs *entières* des n_k, il en sera ensuite toujours de même. Ce fait nous autorise à supposer que les variables n_k évoluent exclusivement dans le domaine des valeurs entières, ce qui est en accord avec le sens physique que nous avons attribué à ces variables.

Nous pouvons préciser cette idée en la présentant sous une autre forme. Nous partirons de la remarque suivante : l'une des propriétés essentielles des fonctions d'onde de la Mécanique ondulatoire ordinaire est que la grandeur $|\Psi(q_1^{(0)}, \ldots, q_k^{(0)}, \ldots, t)|^2$ donne la probabilité pour que les grandeurs $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ soient trouvées à l'instant t avoir les valeurs $q_1^{(0)}, \ldots, q_k^{(0)}, \ldots$. Il paraît donc naturel de supposer, comme nous l'avons fait plus haut, que la fonction d'onde dans l'espace des n, c'est-à-dire $R(n_1, \ldots, n_k, \ldots, t)$, jouit de la propriété que la grandeur $|R(n_1^{(0)}, \ldots, n_k^{(0)}, \ldots t)|^2$ donne la probabilité des valeurs $n_1^{(0)}, \ldots, n_k^{(0)}, \ldots$ pour les variables $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ à l'instant t. La fonction R donne à chaque instant la répartition probable des diverses particules entre les divers états d'énergie, ce qui justifie le nom de *fonction de répartition* que nous lui avons donné.

Puisque l'on peut supposer que R est constamment nulle dans l'espace des n, excepté pour les points de cet espace dont les coordonnées sont des nombres entiers, on peut supposer que les seules valeurs des variables n_i ayant une probabilité différente de zéro à un instant quelconque sont les valeurs entières. Le formalisme de la seconde quantification permet donc bien de traduire le fait que, si l'on détermine le nombre des particules du système qui se trouvent dans l'état $\Psi_i^{(0)}$, on

Les α_i seront les valeurs propres de la grandeur dans l'espace des n et, si la fonction R se développe sous la forme

$$(54)\qquad R(n_1, \ldots, n_k, \ldots, t) = \sum_i c_i(t)\varphi_i(n_1, \ldots, n_k, \ldots),$$

suivant le système complet des φ_i, la quantité $|c_i(t)|^2$ donnera la probabilité pour qu'une mesure fournisse pour la grandeur A la valeur α_i à l'instant t. Il en résulte que la valeur moyenne de A a les deux expressions équivalentes

$$(55)\qquad \overline{A} = \sum_i \alpha_i |c_i|^2 = \sum_n R^*(n_1, \ldots, t) A R(n_1, \ldots, t).$$

Nous reviendrons plus loin sur la signification et l'importance de ces valeurs moyennes.

Nous devons faire remarquer ([1]) que les opérateurs c_k et c_k^* ne sont pas des opérateurs hermitiens dans l'espace n et, par suite, ne correspondent pas à des grandeurs mesurables, tandis que les opérateurs

$$(56)\qquad c_k^* c_k = n_k, \qquad \theta_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial n_k}$$

sont, au contraire, hermitiens et correspondent à des grandeurs mesurables. On vérifiera aisément ces affirmations *en tenant bien compte* du fait que c_k et c_k^* ne sont pas des grandeurs conjuguées, mais que chacun d'eux est un opérateur réel. On pourra également vérifier que l'opérateur $c_k + c_k^*$ est hermitien.

Nous noterons encore que l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par (49) peut être remplacé par le suivant

$$(49')\qquad \mathcal{H} = \sum_{ij} [H_{ij}^{(0)} + V_{ij}(t)](c_i^*)_{op}(c_j)_{op},$$

$H_{ij}^{(0)}$ étant l'élément de matrice $\int_0 \Psi_i^{(0)*} H^{(0)} \Psi_j\, d\tau$ formé à l'aide de l'hamiltonien non perturbé $H^{(0)}$. En effet, les $\Psi_i^{(0)}$ étant fonctions propres de $H^{(0)}$, nous avons $H_{ij}^{(0)} = E_i \delta_{ij}$ et par suite (49') ne diffère de (49) que par la seule adjonction des termes $\sum_{ij} E_i \delta_{ij} c_i^* c_j = \sum_j n_j E_j$. La modification de l'hamiltonien a donc pour seul effet de nous obliger à remplacer la fonction R par la fonction $R e^{\frac{2\pi i}{h} t \sum_j n_j E_j}$, mais nous savons

([1]) *Voir* Note page 89.

7. Forme explicite de l'équation (48). Équivalence de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration et de la théorie de la seconde quantification. — L'équation d'évolution (48) peut s'écrire

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}R(n_1, n_2, \ldots, t) = \sum_{ik} V_{ik}^{(0)}(c_i^*)_{op}(c_k)_{op}R(n_1, n_2, \ldots, t), \tag{63}$$

avec les définitions (18) et (20) des opérateurs c_i et c_i^*.

On vérifie facilement que l'on a

$$(c_i^*)_{op}(c_k)_{op}R(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_k, \ldots, t) \doteq \begin{cases} \sqrt{n_i(n_k+1)}\,R(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots, n_k+1, \ldots, t), \\ n_i R(n_1, \ldots, n_i, \ldots, t), \end{cases} \tag{64}$$

suivant que i est différent de k ou lui est égal.

Posons donc par convention

$$R(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots, n_k+1, \ldots, t) = R(n_1, \ldots, n_i, \ldots, t) \quad \text{si} \quad i = k. \tag{65}$$

Avec cette convention, on peut poser

$$\sum_{ik} V_{ik}^{(0)}(c_i^*)_{op}(c_k)_{op}R(n_1, \ldots, t) = \sum_{ik} V_{ik}^{(0)}\sqrt{n_i(n_k+1-\delta_{ik})}\,R(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots, n_k+1, \ldots, t), \tag{66}$$

d'où

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}R(n_1, \ldots, t) = \sum_{ik} V_{ik}^{(0)}\sqrt{n_i(n_k+1-\delta_{ik})}\,R(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots, n_k+1, \ldots, t). \tag{67}$$

Or la Mécanique ondulatoire des ensembles de particules développée par la méthode habituelle de l'espace de configuration conduit, quand on l'applique à un ensemble de particules de même nature *à fonctions d'onde symétrique*, à retrouver exactement l'équation (67) ([1]). Il y a donc équivalence entre la méthode de l'espace de configuration et celle de la seconde quantification en ce qui concerne la prévision des répartitions entre les états d'énergie, puisque cette répartition est donnée par la fonction R que les deux méthodes définissent finalement par la même équation (67).

Il n'en faut cependant nullement conclure qu'il y ait une coïncidence

([1]) On trouvera le raisonnement complet dans *Une nouvelle théorie de la lumière*, t. I, p. 227 et suiv.

....te entre les deux méthodes. La théorie de la seconde quantification introduit, en effet, un élément nouveau qu'ignorait entièrement la Mécanique ondulatoire de l'espace de configuration. Cet élément, c'est la *phase* θ_i, élément canoniquement conjugué de n_i. *En seconde quantification, les phases* θ_i *sont des observables au même titre que les* n, *et c'est là l'apport essentiellement nouveau de la seconde quantification pour les particules à fonctions d'onde symétriques.*

8. La fonction d'onde Ψ superquantifiée et les relations de commutation qui lui sont relatives. — Pour opérer la seconde quantification, nous sommes partis du développement de la fonction d'onde Ψ suivant les fonctions propres Ψ_i de l'opérateur H. En transformant les c_i en opérateurs de l'espace des n, nous n'avons pas modifié le caractère des Ψ_i qui restent des fonctions numériques, mais d'après le développement $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$, on voit qu'en transformant les c_i en opérateurs, nous transformons aussi le Ψ en opérateur [1]. Ce Ψ superquantifié satisfait à des relations de commutation qui dérivent de celles des c_i et que nous allons établir.

Repérons chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace physique à trois dimensions par le rayon vecteur $\mathbf{r}$ qui le joint à l'origine des coordonnées et désignons par $\Psi(\mathbf{r})$ la valeur de Ψ en M. Ceci posé, nous allons montrer d'abord que, les fonctions propres Ψ_i de l'énergie formant un système orthonormal complet, on a

$$(68) \qquad \sum_i \Psi_i^*(\mathbf{r}')\Psi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\,\delta(y - y')\,\delta(z - z'),$$

les δ étant les fonctions singulières de Dirac. En effet, le caractère complet du système des Ψ_i peut s'exprimer de la manière suivante : si une fonction $f(\mathbf{r})$ se développe sous la forme

$$(69) \qquad f(\mathbf{r}) = \sum_i d_i \Psi_i(\mathbf{r}),$$

on a

$$(70) \qquad \int_D f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})\, d\tau = \int_D |f(\mathbf{r})|^2\, d\tau = \sum_i d_i d_i^*.$$

C'est la relation de Parseval.

---

[1] L'opérateur $\Psi_{op} = \sum_i \Psi_i(x, y, z)(c_i)_{op}$ est un opérateur de l'espace des n dont l'expression varie suivant le point x, y, z que l'on considère dans l'espace physique.

Or les d_i sont donnés par les formules

$$d_i = \int_D \Psi_i^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})\, d\tau. \tag{71}$$

On doit donc avoir

$$\sum_i \int_D \Psi_i(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})\, d\tau \int_D \Psi_i^*(\mathbf{r}') f^*(\mathbf{r}')\, d\tau' = \int_D f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})\, d\tau, \tag{72}$$

ou encore

$$\int_D f^*\, d\tau \int_D \left[\sum_i \Psi_i^*(\mathbf{r}')\Psi_i(\mathbf{r})\right] f(\mathbf{r}')\, d\tau' = \int_D f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})\, d\tau. \tag{73}$$

Comme ceci doit être vrai pour toute fonction $f(\mathbf{r})$, il faut avoir

$$\int_D \left[\sum_i \Psi_i^*(\mathbf{r}')\Psi_i(\mathbf{r})\right] f(\mathbf{r}')\, d\tau' = f(\mathbf{r}), \tag{74}$$

ce qui montre que le crochet est bien égal à $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ et justifie la relation (68).

Utilisant cette relation, il est maintenant facile de trouver les formules de commutation entre les Ψ qui se rapportent à deux lieux différents. On a, en effet,

$$\begin{aligned}[\Psi^*(\mathbf{r}'), \Psi(\mathbf{r})] &= \left[\sum_i c_i^* \Psi_i^*(\mathbf{r}'), \sum_k c_k \Psi_k(\mathbf{r})\right] \\ &= \sum_{ik} [c_i^*, c_k]\, \Psi_i^*(\mathbf{r}')\Psi_k(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{75}$$

d'où, d'après les relations de commutation entre les c_i

$$[\Psi^*(\mathbf{r}'), \Psi(\mathbf{r})] = -\sum_{ik} \delta_{ik} \Psi_i^*(\mathbf{r}')\Psi_k(\mathbf{r}) = -\sum_i \Psi_i^*(\mathbf{r}')\Psi_i(\mathbf{r}) \tag{76}$$

et (68) nous donnent la formule cherchée

$$[\Psi^*(\mathbf{r}'), \Psi(\mathbf{r})] = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{77}$$

Telle est la formule fondamentale concernant la commutation des valeurs du Ψ superquantifié en deux lieux différents, ces valeurs étant considérées comme des opérateurs de l'espace des n. Le symbole Ψ représente, en effet, maintenant un opérateur de l'espace des n dont la valeur varie suivant le lieu considéré.

9. **Grandeurs physiques observables et valeurs moyennes dans l'espace des** n. — Le fait d'avoir transformé les c_i et par suite le Ψ en opérateurs de l'espace des n a pour conséquence que les éléments de matrice et les valeurs moyennes deviennent aussi des opérateurs de cet espace. Quant aux densités correspondantes, elles deviennent des opérateurs de l'espace des n, variables suivant le lieu de l'espace considéré. Toutes ces grandeurs ne peuvent donc plus avoir le caractère de grandeurs physiques observables puisque toute grandeur observable doit être susceptible d'avoir une valeur numérique, alors qu'un opérateur n'a pas de valeur numérique. Pour retrouver des grandeurs physiques observables, la théorie de la seconde quantification est amenée à envisager les *valeurs moyennes dans l'espace des n* des grandeurs que la théorie non superquantifiée considérait comme des grandeurs physiques observables.

Pour préciser cette idée, considérons un ensemble de particules identiques dont la fonction de répartition au sens de la seconde quantification soit $R(n_1, \ldots, t)$. Si A est une grandeur physique observable définie par la théorie non superquantifiée, cette grandeur se trouve transformée par la seconde quantification en un opérateur de l'espace des n, et ce que l'on doit dès lors considérer comme une grandeur physique macroscopiquement observable, c'est

$$\overline{A} = \sum_n R^*(n_1, \ldots, t) A R(n_1, \ldots, t), \tag{78}$$

la moyenne étant ainsi prise dans l'espace des n. Le signe $\sum_n$ représente, nous l'avons vu, une sommation sur toutes les valeurs *entières* possibles des variables n, de sorte que cette sommation équivaut à une intégration dans l'espace des n.

Comme exemple, considérons la grandeur $\int_D |\Psi|^2 d\tau$ qui, dans la théorie non superquantifiée, représente le nombre N total des particules de l'ensemble considéré. Après la seconde quantification, elle devient $\sum_{ik} c_i^* c_k \int_D \Psi_i^* \Psi_k \, d\tau$, les c_i^* et c_k étant les opérateurs définis plus haut dans l'espace des n. En vertu de l'orthogonalité des Ψ_i, ceci se réduit d'ailleurs à $\sum_i c_i^* c_i$. Pour retrouver une grandeur observable, il nous faut donc prendre la valeur moyenne de l'opérateur $\sum_i c_i^* c_i$ dans l'espace

des n, soit

$$\sum_n \mathrm{R}^*(n_1, \ldots, t) \sum_i c_i^* c_i \mathrm{R}(n_1, \ldots, t) = \sum_i n_i = \mathrm{N}, \tag{79}$$

en vertu de la normalisation de la fonction de répartition. On retrouve bien ainsi la grandeur physique N.

Nous aurons à revenir sur cette question quand nous définirons, en Mécanique ondulatoire du photon superquantifiée, les grandeurs électromagnétiques comme des valeurs moyennes prises dans l'espace des n.

10. La seconde quantification pour les particules à fonction d'onde antisymétriques. — On a pu généraliser la méthode de seconde quantification de diverses façons, notamment en montrant, comme l'a fait M. Fock, qu'elle peut se développer en partant de l'expansion du Ψ suivant les fonctions propres d'un opérateur hermitien autre que l'opérateur Hamiltonien, c'est-à-dire correspondant à une grandeur mesurable autre que l'énergie. Mais l'extension la plus importante est celle qui permet de superquantifier la Mécanique ondulatoire des particules à états antisymétriques obéissant à la statistique de Fermi-Dirac.

Pour ce genre de particules, il faut exprimer qu'il ne saurait y avoir plus d'une particule par état d'énergie (principe de Pauli). Pour traduire ce fait, MM. Jordan et Wigner ont montré qu'il fallait remplacer les relations de commutation des c_k et c_k^* employées jusqu'ici pour les particules à états symétriques par les suivantes

$$[c_i^*, c_k]_+ = \delta_{ik}, \qquad [c_i^*, c_k^*]_+ = [c_i, c_k]_+ = 0, \tag{80}$$

avec la définition que voici de *l'anticommutateur* de a et b

$$[a, b]_+ = ab + ba. \tag{81}$$

En effet, comme nous posons toujours $c_i^* c_i = n_i$, nous aurons ici

$$n_i^2 = c_i^* c_i \times c_i^* c_i = c_i^* (1 - c_i^* c_i) c_i = c_i^* c_i - c_i^* c_i^* c_i c_i, \tag{82}$$

mais comme $c_i^* c_i^* + c_i^* c_i^*$ doit être nul d'après (80), $c_i^* c_i^*$ est nul et il reste

$$n_i^2 = c_i^* c_i = n_i, \tag{83}$$

d'où l'on conclut $n_i = 0$ ou $n_i = 1$ conformément au principe de Pauli.

Les relations (80) de Wigner-Jordan conduisent pour le Ψ superquantifié aux relations de commutation suivantes :

(84) $[\Psi^*(\mathbf{r}'), \Psi(\mathbf{r})]_+ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $\quad [\Psi^*(\mathbf{r}'), \Psi^*(\mathbf{r})]_+ = [\Psi(\mathbf{r}'), \Psi(\mathbf{r})]_+ = 0.$

Dans le cas des particules à fonction d'onde symétrique, M. Dirac avait obtenu une *représentation* simple des opérateurs c_k et c_i^* à l'aide des formules (18) et (20). Il est plus difficile de trouver une représentation des opérateurs obéissant aux relations (80). M. Wigner y est cependant parvenu de la façon suivante.

Considérons d'abord les matrices à deux lignes et deux colonnes

$$(85) \qquad d = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad d^+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On trouve aisément les formules

$$(86) \qquad \begin{cases} d^+ d = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, & d d^+ = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ dd = d^+ d^+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & d d^+ + d^+ d = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{cases}$$

On a aussi

$$(87) \qquad v = 1 - 2 d^+ d = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad v^+ = 1 - 2 d^+ d = v.$$

Si nous opérons la *fusion* des matrices relatives aux divers états quantifiés, nous obtiendrons des matrices d_n telles que

$$(88) \qquad [d_n^+, d_n]_+ = d_n^+ d_n + d_n d_n^+ = 1, \qquad [d_m^+, d_n] = [d_m, d_n] = [d_m^+, d_n^+] = 0$$

Posons

$$(89) \qquad c_n = d_n \prod_{1}^{n-1}{}_k v_k.$$

Pour $m \geqq n$, d_m et d_m^+ commutent avec $\prod_1^{n-1}{}_k v_k$, d'où

$$(90) \qquad c_n^+ = \prod_1^{n-1}{}_k v_k^+ d_n^+ = d_n^+ \prod_1^{n-1}{}_k v_k,$$

d'où

$$(91) \qquad c_n^+ c_n + c_n c_n^+ = d_n^+ \prod_1^{n-1}{}_k v_k \, d_n \prod_1^{n-1}{}_k v_k + d_n \prod_1^{n-1}{}_k v_k \, d_n^+ \prod_1^{n-1}{}_k v_k = [d_n^+, d_n]_+ \left(\prod_1^{n-1}{}_k v_k \right)^2 = 1.$$

De même pour $m > n$, on trouve

$$(92)\quad c_m^+ c_n + c_n c_m^+ = d_m^+ \prod_{k=1}^{m-1} v_k \times d_n \prod_{l=1}^{n-1} v_l + d_n \prod_{l=1}^{n-1} v_l \times d_m^+ \prod_{k=1}^{m-1} v_k = \ldots + d_n d_m^+ \prod_{l=1}^{n-1} v_l \prod_{k=1}^{m-1} v_k.$$

Or on a

$$(93)\quad \prod_{k=1}^{m-1} v_k\, d_n = v_n\, d_n \prod_{k=1}^{m-1}{}' v_k,$$

l'accent excluant la valeur $k = n$. D'où

$$(94)\quad \begin{cases} [v_n, d_n]_+ = [1 - 2\, d_n^+ d_n, d_n]_+ = 2\, d_n - 2[d_n^+, d_n]_+ d_n = 0, \\ v_n\, d_n = -d_n v_n, \quad \prod_{k=1}^{m-1} v_k\, d_n = -d_n \prod_{k=1}^{m-1} v_k, \end{cases}$$

et finalement

$$(95)\quad c_m^+ c_n + c_n c_m^+ = (d_n d_m^+ - d_m^+ d_n) \prod_{k=1}^{m-1} v_k \prod_{l=1}^{m-1} v_l = 0 \qquad \text{pour} \quad n \neq m.$$

On trouve aussi

$$(96)\quad \begin{cases} [c_m^+, c_m^+]_+ = [d_m^+, d_m^+]_+ = 0, \qquad [c_m, c_m]_+ = [d_m, d_m]_+ = 0, \\ [c_n^+, c_m^+]_+ = [d_m^+, d_n^+] \prod_{l=1}^{n-1} v_l \prod_{k=1}^{n-1} v_k = 0, \qquad [c_n, c_m]_+ = 0. \end{cases}$$

Toutes les conditions imposées aux c et c^* par les relations de Jordan-Wigner sont donc bien satisfaites par cette représentation si l'on prend pour $(c^*)_{op}$ l'opérateur c^+.

Nous n'insisterons pas davantage sur la seconde quantification des particules à états antisymétriques dont nous ne nous servirons pas dans la suite de cet Ouvrage.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DE LA SECONDE QUANTIFICATION A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON.

1. Retour sur la définition des grandeurs maxwelliennes et sur l'état d'annihilation. — Nous avons défini précédemment les grandeurs maxwelliennes liées à un photon qui se trouve initialement dans un état représenté par une certaine fonction d'onde Ψ comme étant des densités d'éléments de matrice correspondant à la transition de l'état Ψ à l'état d'annihilation $\Psi^{(0)}$. Ce point de vue nous a conduits à adopter pour ces grandeurs maxwelliennes des expressions de la forme $K\Psi^{(0)}F\Psi$, où F est l'opérateur correspondant à la grandeur envisagée et où K est une constante que, afin d'effectuer le raccord nécessaire avec la théorie classique, nous avons été amenés à choisir égale à $\frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0}}$.

Si nous supposons que l'état Ψ initial est formé par une superposition d'ondes planes monochromatiques normées et indépendantes Ψ_k (chacune définie par son vecteur de propagation **k** et par son état de polarisation, par exemple onde transversale rectilignement polarisée ou onde longitudinale), nous poserons

$$\Psi = \sum_k c_k \Psi_k \tag{1}$$

et chaque grandeur maxwellienne sera de la forme $\sum_k K\Psi^{(0)}Fc_k\Psi_k$, chaque terme de la somme se rapportant à une onde plane monochromatique de polarisation définie.

Mais, en réalité, l'état d'annihilation doit être considéré comme un réservoir contenant un nombre immense et sensiblement constant n_0 de photons. Donc, même lorsqu'on considère, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, un seul photon dans l'état non annihilé initial, il faut cependant toujours tenir compte du nombre immense n_0 des photons dans l'état d'annihilation.

Cette remarque conduit à considérer une fonction d'onde initiale de la forme

$$\Psi = c_0 \Psi^{(0)} + \sum_k c_k \Psi_k, \tag{2}$$

c'est-à-dire à ajouter à l'expression (1) un terme qui tient compte de l'état d'annihilation, puis une fonction d'onde finale de la forme

$$\Psi = c'_0 \Psi^{(0)}, \tag{3}$$

de sorte que les grandeurs maxwelliennes doivent avec nos hypothèses avoir la forme

$$\sum_k c'^*_0 \Psi^{(0)} K' F \Psi, \tag{4}$$

K′ étant une constante à déterminer.

Puisque, même dans le cas d'un seul photon non annihilé initial, nous avons toujours affaire à un nombre énorme de photons, il est nécessaire d'introduire systématiquement en Mécanique ondulatoire du photon la seconde quantification. Comme les photons sont des particules à états symétriques, nous devons poser

$$c_0 = e^{\frac{\partial}{\partial n_0}} \sqrt{n_0}, \qquad c^*_0 = \sqrt{n_0}\, e^{-\frac{\partial}{\partial n_0}}, \qquad c_k = e^{\frac{\partial}{\partial n_k}} \sqrt{n_k}, \qquad c^*_k = \sqrt{n_k}\, e^{-\frac{\partial}{\partial n_k}}. \tag{5}$$

Seulement les c_0 et les c^*_0 jouissent d'une propriété particulière en raison de la valeur énorme et presque constante du nombre n_0 des photons dans l'état d'annihilation. La variation d'une unité de n_0 ne peut, en effet, apporter aucune modification sensible de la situation, de sorte que c_0 et c^*_0 se réduisent sensiblement à l'opération *multiplication par* $\sqrt{n_0}$ et, comme $\Psi^{(0)}$ est réel, on peut écrire pour les grandeurs maxwelliennes, à la place de (4), l'expression approximative

$$\sum_k \Psi^{(0)} K' \sqrt{n_0}\, F c_k \Psi_k. \tag{6}$$

On voit alors qu'en posant

$$K' = \frac{K}{\sqrt{n_0}} = \frac{h}{4\pi \sqrt{n_0}\, \mu_0}, \tag{7}$$

on retombe sur l'expression adoptée antérieurement, ce qui nous montre que la constante K précédemment utilisée doit être considérée comme le produit d'une constante extrêmement petite K′ par le nombre extrêmement grand $\sqrt{n_0}$.

Dans l'expression $\sum_k K \Psi^{(0)} F c_k \Psi_k$ des grandeurs maxwelliennes, figurent maintenant les c_k qui sont devenues des opérateurs de l'espace des n. Ces grandeurs Maxwelliennes sont donc devenues, elles aussi, des opérateurs de l'espace des n dont la valeur varie d'ailleurs suivant le lieu xyz et le temps t, puisque les Ψ_k dépendent de ces variables. Nous arrivons ainsi à la conception fondamentale de la théorie quantique des champs électromagnétiques suivant laquelle ces champs doivent être considérés comme des opérateurs de l'espace des n, fonctions de $xyzt$. Nous aurons l'occasion d'approfondir plus complètement cette conception nouvelle des grandeurs électromagnétiques : pour l'instant, nous allons nous occuper de rechercher quelles sont les relations de commutation existant entre ces grandeurs conçues comme opérateurs dans l'espace des n.

2. Relations de commutation entre les potentiels électromagnétiques des ondes planes. — Considérons une onde monochromatique de polarisation bien définie ayant un vecteur de propagation $\mathbf{k}$ et choisissons un système d'axes rectangulaires $O'x'y'z'$ tel que Oz' ait la direction $\mathbf{k}$. Posons comme d'habitude

$$P = e^{i(kct - \mathbf{kr})}. \tag{8}$$

En effectuant la normalisation des ondes Ψ dans un volume v, on trouve (¹) pour l'expression des potentiels (en prenant v pour unité de volume) :

a. pour une onde à vibration électrique parallèle à Ox

$$A_x = c_k \sqrt{\frac{hc}{4\pi k}}\, P, \qquad A_y = A_z = V = 0; \tag{9}$$

b. pour une onde à vibration électrique parallèle à Oy

$$A_y = c_k \sqrt{\frac{hc}{4\pi k}}\, P, \qquad A_x = A_z = V = 0; \tag{9'}$$

c. pour une onde longitudinale

$$A_z = c_k \sqrt{\frac{khc}{4\pi k_0^2}}\, P, \qquad V = c_k \frac{|\mathbf{k}|}{k} \sqrt{\frac{khc}{4\pi k_0^2}}\, P, \qquad A_x = A_y = 0. \tag{9''}$$

(¹) *Voir* Chapitre IV, paragraphe 3.

Les expressions (9) et (9′) montrent que pour $i', j' = 1, 2$, on a

$$[A^*_{i'}, A_{j'}] = \frac{hc}{4\pi k}[c^*_k, c_k]\delta_{i'j'} = -\frac{hc}{4\pi k}\delta_{i'j'}. \tag{10}$$

Comme $[c^*_{k'}, c_k] = 0$ pour $k' \neq k$, on peut aussi écrire

$$[A^*_{i'}(\mathbf{k}'), A_{j'}(\mathbf{k})] = -\frac{hc}{4\pi k}\delta_{i'j'}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{11}$$

Le même mode de rayonnement appliqué aux autres expressions (9), (9′) et (9″) nous conduit aisément à l'ensemble des relations de commutation suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&[A^*_{i'}(\mathbf{k}'), A_{j'}(\mathbf{k})] = -\frac{hc}{4\pi k}\delta_{i'j'}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (i', j' = 1, 2),\\
&[A^*_{i'}(\mathbf{k}'), A_{j'}(\mathbf{k})] = 0 \qquad (i' = 1, 2, j' = 3, 4 \text{ ou inversement}),\\
&[A^*_{3'}(\mathbf{k}'), A_{3'}(\mathbf{k})] = -\frac{hc}{4\pi k_0^2}k\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\
&[A^*_{3'}(\mathbf{k}'), V(\mathbf{k})] = \frac{hc}{4\pi k_0^2}|\mathbf{k}|\,\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}),\\
&[V^*(k'), V(k)] = -\frac{hc}{4\pi k_0^2}\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}).
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

On voit sur ce tableau que $A^*_{3'}$ et V ne commutent pas : ceci vient de ce que ces grandeurs sont toutes deux liées au même type d'onde, les ondes longitudinales, et dépendent par suite d'une même constante arbitraire.

Les relations de commutation (12) sont valables dans le système d'axes rectangulaires $O'x'y'z'$ tels que Oz' coïncide avec la direction du vecteur $\mathbf{k}$ de propagation. Cette hypothèse est évidemment trop particulière et pour pouvoir traiter le cas général d'une superposition d'ondes planes, nous devons savoir écrire les relations de commutation dans un système d'axes rectangulaires quelconques $Oxyz$.

Remplaçons $x'y'z'$ par $x'_1 x'_2 x'_3$ et xyz par x_1, x_2, x_3.

Prenons trois vecteurs égaux à l'unité sur chacun des trois axes $O'x'_1$, $O'x'_2$, $O'x'_3$ et soient $\mathbf{1}''$, $\mathbf{2}'$ et $\mathbf{3}'$ ces vecteurs. Dans le système $Ox_1x_2x_3$, les vecteurs $\mathbf{i}'$ ont pour composantes $\alpha_{i'1}$, $\alpha_{i'2}$ et $\alpha_{i'3}$ et l'on a la relation bien connue

$$\sum_{1}^{3}{}_{i'}\alpha_{i'j}\alpha_{i'k} = \delta_{jk}, \tag{13}$$

exprimant que les vecteurs $\mathbf{1}'$, $\mathbf{2}'$ et $\mathbf{3}'$ sont orthogonaux et égaux à l'unité.

Quand on passe du système de référence primé au système de référence non primé, les composantes du potentiel vecteur se transforment suivant la formule

$$(14)\qquad A_i = \sum_{i'}^{3}{}_{1}\, \alpha_{i'i} A_{i'} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

tandis que le potentiel scalaire V, composante de temps du quadrivecteur potentiel, reste immuable.

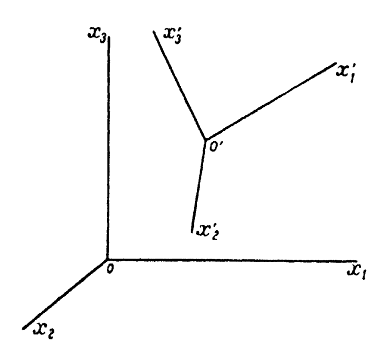


Fig. 2.

On a

$$(15)\qquad [A_i^*(\mathbf{k}'), A_j(\mathbf{k})] = \sum_{i'=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3} \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}[A_{i'}^*(\mathbf{k}'), A_{j'}(\mathbf{k})]$$

$$= \left[\sum_{i'j'=1}^{2} \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\left(-\frac{hc}{4\pi k}\delta_{i'j'}\right) + \alpha_{3'i}\alpha_{3'j}\left(-\frac{khc}{4\pi k_0^2}\right)\right]\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}).$$

Or

$$(16)\qquad \sum_{i'j'=1}^{2} \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}\,\delta_{i'j'} = \sum_{i'=1}^{3} \alpha_{i'i}\alpha_{i'j} - \alpha_{3'i}\alpha_{3'j} = \delta_{ij} - \alpha_{3'i}\alpha_{3'j}.$$

Donc

$$(17)\qquad [A_i^*(\mathbf{k}'), A_j(\mathbf{k})] = \left[-\frac{hc}{4\pi k}\delta_{ij} + \alpha_{3'i}\alpha_{3'j}\left(\frac{hc}{4\pi k} - \frac{khc}{4\pi k_0^2}\right)\right]\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}).$$

Mais de $k^2 = |\mathbf{k}|^2 + k_0^2$, on tire

$$(18)\qquad \frac{hc}{4\pi k} - \frac{khc}{4\pi k_0^2} = -\frac{hc}{4\pi}\frac{|\mathbf{k}|^2}{kk_0^2},$$

et comme

$$\alpha_{3'i}\alpha_{3'j}|\mathbf{k}|^2 = \alpha_{3'i}|\mathbf{k}|\alpha_{3'j}|\mathbf{k}| = k_i k_j, \tag{19}$$

il vient

$$[A_i^*(\mathbf{k}'), A_j(\mathbf{k})] = -\frac{hc}{4\pi k}\left(\delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k_0^2}\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{20}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned}[A_i^*(\mathbf{k}'), V(\mathbf{k})] &= \sum_{i'=1}^{3}\alpha_{i'i}[A_{i'}^*(\mathbf{k}'), V(\mathbf{k})] \\ &= -\frac{hc}{4\pi k_0^2}\alpha_{3'i}|\mathbf{k}|\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = -\frac{hc}{4\pi k_0^2}k_i\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned} \tag{21}$$

Enfin il est évident que $[V^*(\mathbf{k}'), V(\mathbf{k})]$ ne change pas par suite du changement d'axes.

Finalement, on a donc dans un système d'axes rectangulaires quelconques

$$\left\{\begin{aligned}[A_i^*(\mathbf{k}'), A_j(\mathbf{k})] &= -\frac{hc}{4\pi k}\left(\delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k_0^2}\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (i, j = 1, 2, 3), \\ [A_i^*(\mathbf{k}'), V(\mathbf{k})] &= -\frac{hc}{4\pi k_0^2}k_i\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\ [V^*(\mathbf{k}'), V(\mathbf{k})] &= -\frac{hc}{4\pi k_0^2}\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\end{aligned}\right. \tag{22}$$

avec $i, j = 1, 2, 3$. Telles sont les relations fondamentales de commutation entre les composantes du quadrivecteur potentiel pour les ondes planes monochromatiques en Mécanique ondulatoire du photon (et plus généralement pour la particule de spin 1).

3. **Autres relations de commutation entre grandeurs électromagnétiques.** — En partant des relations de commutation (22), il est facile de former les relations analogues entre une composante de potentiel et une composante de champ ou entre deux composantes de champ. En vertu des relations qui lient les champs aux potentiels, les amplitudes spectrales $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ s'expriment linéairement en fonction des amplitudes spectrales $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ et $V(\mathbf{k})$, les coefficients de proportionnalité étant les quantités k et k_i.

Prenons comme exemple les relations de commutation entre les composantes de $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ et celles de $\mathbf{E}(\mathbf{k})$, relations qui ont une forme très simple. Pour une onde plane, nous avons

$$E_j = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x_j} = -ikA_j + ik_jV. \tag{23}$$

En combinant les relations de commutation (22), on trouve aisément

$$(24)\qquad [A_i^*(\mathbf{k}'), E_j(\mathbf{k})] = -\frac{hc}{4\pi i}\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

relation qui nous servira.

4. Invariance relativiste des relations de commutation (22). — Il est essentiel de démontrer que les relations de commutation (22) sont invariantes pour une transformation de Lorentz. Pour cela, nous nous appuierons sur deux théorèmes préliminaires.

a. La quantité $\frac{dk_x\,dk_y\,dk_z}{k} = \frac{d\mathbf{k}}{k}$ est un invariant relativiste. En effet, k_x, k_y, k_z et k étant les composantes d'un vecteur d'espace-temps, le numérateur et le dénominateur de l'expression considérée sont invariants pour une simple rotation des axes d'espace : il suffit donc de démontrer que cette expression est invariante pour une transformation simple de Lorentz comportant seulement un mouvement relatif le long de l'axe Oz. Or, pour une telle transformation, on a

$$(25)\qquad k'_x = k_x,\qquad k'_y = k_y,\qquad k'_z = \frac{k_z - \beta k}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad k' = \frac{k - \beta k_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

où $\beta = \frac{v}{c}$ est le paramètre classique de la transformation de Lorentz. On calcule aisément la valeur du déterminant Jacobien

$$(26)\qquad \frac{D(k'_x, k'_y, k'_z)}{D(k_x, k_y, k_z)} = \frac{1}{k}\,\frac{k - \beta k_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{k'}{k},$$

d'où, par un théorème bien connu de Jacobi, l'on tire

$$(27)\qquad d\mathbf{k}' = \frac{k'}{k}\,d\mathbf{k}$$

ou

$$(28)\qquad \frac{d\mathbf{k}'}{k'} = \frac{d\mathbf{k}}{k},$$

ce qui démontre le théorème.

b. La quantité $k\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = k\,\delta(k_x - k'_x)\,\delta(k_y - k'_y)\,\delta(k_z - k'_z)$ est un invariant relativiste.

En effet, d'après les propriétés de la fonction singulière de Dirac, l'intégrale $\iiint \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,d\mathbf{k}$ est égale à l'unité dans tous les systèmes de référence. Or, cette intégrale peut s'écrire $\iiint k\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\frac{d\mathbf{k}}{k}$. Le

second facteur sous le signe somme est invariant d'après le premier théorème : il faut donc que le second le soit aussi, ce qui démontre le second théorème.

Du théorème a, nous pouvons déduire le corollaire suivant : *Si* A_1, A_2, A_3, A_4 *sont les quatre composantes d'un vecteur d'espace-temps telles que l'on ait*

$$(29) \qquad A_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \iiint A_i(\mathbf{k})\, e^{i(kct - \mathbf{kr})}\, d\mathbf{k}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les expressions $kA_i(\mathbf{k})$ *se transforment comme les composantes d'un vecteur d'espace-temps*. Pour le voir, il suffit de multiplier et de diviser par k l'expression figurant sous le signe somme dans (29).

Écrivons maintenant sous une forme plus condensée les relations de commutation (22) entre les potentiels en nous servant des notations d'Univers, c'est-à-dire des coordonnées x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$. Le quadrivecteur potentiel d'Univers et le quadrivecteur de propagation ont respectivement pour composantes :

$$(30) \qquad \begin{cases} A_1 = A_x, & A_2 = A_y, & A_3 = A_z, & A_4 = iV, \\ k_1 = k_x, & k_2 = k_y, & k_3 = k_z, & k_4 = ik. \end{cases}$$

Les relations de commutation (22) peuvent alors s'écrirent sous la forme condensée

$$(31) \qquad [k_4^{(1)} A_i^*(\mathbf{k}^{(1)}), k_4^{(2)} A_j(k^{(2)})] = \frac{hc}{4\pi i}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i^{(2)} k_j^{(2)}}{k_0^2}\right) k_4^{(2)}\, \delta(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{k}^{(2)}),$$

où i et j peuvent avoir les valeurs 1, 2, 3, 4.

Effectuons maintenant une transformation quelconque de Lorentz. Dans l'Univers de Minkowski, cette transformation se traduit simplement par une rotation d'ensemble des axes, c'est-à-dire par une transformation orthogonale telle que les composantes de tout quadrivecteur $\mathbf{F}$ dans le second système de référence soient liées à ses composantes dans le premier système par les relations

$$(32) \qquad F'_i = \sum_j^{4} o_{ij} F_j, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les o_{ij} satisfaisant à la relation classique

$$(33) \qquad \sum_l^{4} o_{li}\, o_{ml} = \delta_{lm}.$$

En vertu du théorème a et de son corollaire, les deux termes du commutateur (31) se transforment comme des composantes de vecteur et nous avons

$$(34)\qquad [k_4'^{(1)}A_l'^*(\mathbf{k}'^{(1)}),\ k_4'^{(2)}A_m'(\mathbf{k}'^{(1)})] = \sum_{ij=1}^{4} o_{li}o_{mj}[k_4^{(1)}A_i^*(\mathbf{k}^{(1)}),\ k_4^{(2)}A_j(\mathbf{k}^{(2)})].$$

Si donc nous admettons la validité de (31) dans le premier système de référence, nous trouverons

$$(35)\qquad \begin{aligned}[k_4'^{(1)}A_l'^*(\mathbf{k}'^{(1)}),\ k_4'^{(2)}A_m'(\mathbf{k}'^{(2)})] &= \frac{hc}{4\pi i}\left[\sum_{ij=1}^{4} o_{li}o_{mj}\left(\delta_{ij}+\frac{k_i^{(2)}k_j^{(2)}}{k_0^2}\right)\right]k_4^{(2)}\,\delta(\mathbf{k}^{(1)}-\mathbf{k}^{(2)})\\ &= \frac{hc}{4\pi i}\left[\delta_{lm}+\frac{k_l'^{(2)}k_m'^{(2)}}{k_0^2}\right]\mathbf{k}_4'^{(2)}\,\delta(\mathbf{k}'^{(1)}-\mathbf{k}'^{(2)}),\end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue à l'aide du théorème b.

Nous voyons alors que les relations de commutation ont la même forme dans le second système que dans le premier, ce qui démontre l'invariance de ces relations pour une transformation de Lorentz.

5. Relations de commutation « locales » entre les grandeurs électromagnétiques. — Les relations de commutation envisagées jusqu'ici sont des relations de commutation *spectrales* en ce sens qu'elles portent sur des coefficients de développement de Fourier. On peut aisément en déduire des relations de commutation *locales* entre les grandeurs électromagnétiques relatives aux divers points de l'espace. Ces grandeurs se trouvent, en effet, transformées en opérateurs de l'espace des n, fonctions du lieu et du temps considérés, et l'on peut rechercher si ces opérateurs commutent ou non.

Pour donner un exemple de ces relations de commutation locales, partons de la formule

$$(36)\qquad [A_l^*(\mathbf{k}'),\ V(\mathbf{k})] = -\frac{hc}{4\pi}\frac{k_l}{k_0^2}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

et utilisons les développements de Fourier de la forme (29). Il vient

$$(37)\qquad \begin{aligned}[A_l^*(\mathbf{r},t),\ V(\mathbf{r},t)] &= \frac{1}{8\pi^3}\int d\mathbf{k}'\int d\mathbf{k}\,[A_l^*(\mathbf{k}'),\ V(\mathbf{k})]\,e^{i[(k-k')ct-(\mathbf{k}'\mathbf{r}')]}\\ &= -\frac{hc}{4\pi k_0^2}\frac{1}{8\pi^3}\int k_l\,e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,d\mathbf{k}\\ &= \frac{hc}{4\pi i k_0^2}\frac{1}{8\pi^3}\frac{\partial}{\partial x_l}\int e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,d\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Nous savons (¹) que la dernière intégrale vaut $8\pi^3\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, ce qui nous donne

$$(38) \qquad [A_i^*(\mathbf{r}'), V(\mathbf{r})] = \frac{hc}{4\pi i k_0^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (i = 1, 2, 3),$$

la variable t que nous sous-entendons ayant même valeur dans A_i^* et dans V.

On trouve des formules analogues pour les autres composantes de potentiel. Sans nous attacher à les écrire, passons aux relations de commutation entre les composantes de $\mathbf{A}$ et celles de $\mathbf{E}$.

Nous avons

$$(39) \qquad \begin{aligned}[A_i^*(\mathbf{r}'), E_j(\mathbf{r})] &= \frac{1}{8\pi^3}\int d\mathbf{k}'\int d\mathbf{k}\,[A_i^*(\mathbf{k}'), E_j(\mathbf{k})]\,e^{i[(k'-k)ct-(\mathbf{kr}-\mathbf{k'r'})]} \\ &= \frac{hc}{4\pi i}\,\delta_{ij}\,\frac{1}{8\pi^3}\int d\mathbf{k}\,e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = -\frac{hc}{4\pi i}\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Ici se présente dans la théorie habituelle (où l'on se place implicitement dans le cas limite $\mu_0 = 0$) une très grave difficulté. En effet, si nous appliquons à la relation (39) l'opération $\sum_1^3{}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, nous obtenons

$$(40) \qquad [A_i^*(\mathbf{r}'), \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})] = -\frac{hc}{4\pi i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Or, avec les équations classiques de Maxwell, cette relation est inadmissible, car, $\operatorname{div}\mathbf{E}$ étant partout nulle dans le vide, le premier membre de (40) est nul, tandis que le second ne l'est pas.

Nous verrons comment la théorie quantique des champs s'efforce de lever cette difficulté en changeant le sens de la relation $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, mais le moyen qu'elle emploie et qui nous paraît artificiel est tout à fait inutile en Mécanique ondulatoire du photon si l'on admet $\mu_0 \neq 0$. En effet, les relations (38) et (40) nous donnent

$$(41) \qquad [A_i^*(\mathbf{r}'), \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r})] = -k_0^2[A_i^*(\mathbf{r}'), V(\mathbf{r})],$$

et cette relation est bien vérifiée en Mécanique ondulatoire du photon, puisque l'on a non pas $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, mais $\operatorname{div}\mathbf{E} = -k_0^2 V$. C'est donc parce qu'elle pose brutalement $\mu_0 = 0$ que la théorie quantique des champs usuelle se heurte ici à une difficulté. Celle-ci est évitée par la Mécanique ondulatoire du photon en posant $\mu_0 \neq 0$ et *cela si petite que*

(¹) *Voir* Chapitre I, formule (14).

soit la masse propre du photon. Il est curieux de constater qu'il y a ici une discontinuité, la difficulté en question apparaissant brusquement quand on pose $\mu_0 = 0$.

Nous donnerons enfin les relations de commutation locale entre les composantes de **H** et de **E**. Si i, k, l est une certaine permutation *paire* des indices 1, 2, 3, on a

$$H_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}. \tag{42}$$

De (39), on tire alors

$$[H_i^*(\mathbf{r}'), E_j(\mathbf{r})] = \frac{hc}{4\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{lj}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{43}$$

relation classique en théorie quantique des champs.

Notons enfin la relation facile à vérifier

$$[A_i^*(\mathbf{r}'), H_j(\mathbf{r})] = 0. \tag{44}$$

6. **Relations d'incertitude pour les champs électromagnétiques.** — M. Heisenberg a montré, il y a longtemps déjà, comment l'existence des photons conduit à admettre que les champs électromagnétiques observables à grande échelle ne sont pas des grandeurs mesurables avec précision en un point de l'espace. De là, on peut conclure que les grandeurs électromagnétiques doivent, en théorie quantique, être soumises à des relations de commutation.

Considérons avec M. Heisenberg un petit volume δv de l'espace physique que, pour préciser, nous imaginerons être un cube d'arêtes δl de sorte que $\delta v = (\delta l)^3$. Supposons que ce volume soit parcouru par une onde électromagnétique de longueur d'onde λ et que l'on cherche à mesurer le champ électrique et le champ magnétique de cette onde à l'intérieur de δv grâce à un dispositif occupant δv et indiquant la *valeur moyenne* de ces grandeurs dans δv. Pour que ces valeurs moyennes puissent être différentes de zéro, il faut avoir $\lambda \leqq \delta l$. D'après la théorie électromagnétique, l'énergie et la quantité de mouvement du rayonnement contenu dans δv seront données par les formules

$$\rho(W)\,\delta v = \frac{E^2 + H^2}{2}\,\delta v; \qquad \rho(\mathbf{G})\,\delta v = \frac{1}{c}[\mathbf{E}\mathbf{H}]\,\delta v. \tag{45}$$

Si l'on diminue δv, on peut rendre ces quantités aussi petites que l'on veut et l'on arrive ainsi à une contradiction avec l'idée que la radiation de fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda}$ est formée de photons d'énergie $h\nu = \frac{h}{\lambda}$

et de quantité de mouvement $\frac{h}{\lambda}$. C'est en somme là la contradiction qui oppose les conceptions classiques de la Physique du champ à celles de la Physique corpusculaire.

Pour une valeur donnée de δl, la plus haute fréquence dont les champs sont observables est de l'ordre de $\nu = \frac{c}{\delta l}$, puisque λ doit être supérieur à δl; d'où pour le plus grand quantum correspondant la valeur $h\nu = \frac{hc}{\delta l}$. Si l'on veut pouvoir considérer les valeurs moyennes fournies par les formules de Maxwell sans se trouver en contradiction avec la structure corpusculaire de la lumière, il faut donc que les expressions (45) soient affectées d'incertitudes au moins égales à $\frac{hc}{\delta l}$ et à $\frac{h}{\delta l}$ respectivement. Ceci signifie que les champs **E** et **H** (qui sont ici les champs observables à l'échelle microscopique), ne peuvent, tout comme les quantités canoniquement conjuguées p et q en Mécanique ondulatoire ordinaire, être mesurées simultanément qu'avec des *incertitudes* $\Delta\mathbf{E}$ et $\Delta\mathbf{H}$ telles que

$$(46)\qquad \begin{cases} \Delta\rho(W)\,\delta v = \delta v\left[(\mathbf{E}\,\Delta\mathbf{E})+(\mathbf{H}\,\Delta\mathbf{H})+\frac{1}{2}(\Delta\mathrm{E})^2+\frac{1}{2}(\Delta\mathrm{H})^2\right] \geq \frac{hc}{\delta l}, \\ \Delta\rho(\mathbf{G})\,\delta v = \frac{\delta v}{c}\left\{[\mathbf{E}\,\Delta\mathbf{H}]+[\Delta\mathbf{E}\,\mathbf{H}]+[\Delta\mathbf{E}\,\Delta\mathbf{H}]\right\} \geq \frac{h}{\delta l}. \end{cases}$$

Ces inégalités doivent rester exactes quand **E** et **H** tendent vers zéro, puisque la structure quantique du rayonnement subsiste, même pour une intensité très faible. Les termes indépendants de **E** et de **H** doivent donc suffire pour assurer les inégalités (36), ce qui donne en partant de la deuxième inégalité

$$(47)\qquad \Delta\mathrm{E}_x\,\Delta\mathrm{H}_y \geq \frac{hc}{\delta l\,\delta v} = \frac{hc}{(\delta l)^4},$$

ou *a fortiori*,

$$(48)\qquad \Delta\mathrm{E}_x\,\Delta\mathrm{H}_y \geq \frac{hc}{\delta v\,\lambda} = \frac{h\nu}{\delta v}$$

et deux autres inégalités obtenues par permutation circulaire. Ces relations constituent les relations d'incertitude d'Heisenberg pour les champs électromagnétiques.

Si les inégalités (48) sont satisfaites, non seulement la seconde inégalité (46), mais aussi la première se trouvent vérifiées. C'est ce dont on se rendra compte aisément.

Conformément aux idées générales de la Mécanique quantique, les relations d'incertitude (48) pour les champs nous conduisent à dire que la composante du champ électrique dans une certaine direction et une composante du champ magnétique au même point dans une direction perpendiculaire ne sont pas simultanément mesurables avec précision et doivent correspondre à des opérateurs qui ne commutent pas. Nous pouvons préciser davantage, car on sait [1] que les relations d'incertitude

(49) $$\Delta q\,\Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$$

dérivent des relations de commutation

(50) $$(qp - pq)_{op} = \frac{h}{2\pi i}.$$

Aux relations d'incertitude (48) pour les composantes de champs, nous pouvons donc nous attendre à voir correspondre la relation de commutation

(51) $$[(E_x)_{op}, (H_y)_{op}] = \frac{h\nu}{\delta v},$$

à laquelle on adjoindra naturellement celles qui s'en déduisent par permutation circulaire sur x, y, z.

Nous allons voir maintenant que les relations de commutation obtenues aux paragraphes précédents conduisent bien à retrouver (51).

7. Passage des relations de commutation pour les champs microscopiques à celles valables pour les champs macroscopiques. — Les considérations du paragraphe précédent dues à M. Heisenberg portent sur les champs observables à l'échelle macroscopique, champs qui sont nécessairement des grandeurs réelles. Or, nous avons antérieurement défini des champs macroscopiques complexes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ et nous avons admis que les champs macroscopiques réels devaient s'en déduire par les relations

(52) $$\mathbf{E}^{(r)} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^*, \qquad \mathbf{H}^{(r)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^*.$$

Reprenons le raisonnement d'Heisenberg en considérant une onde plane monochromatique de propagation $\mathbf{k}$ qui traverse un petit volume δv de l'espace dont les dimensions sont très petites par rapport à la longueur

(1) *Voir*, par exemple, *Théorie générale des particules à spin*, p. 30.

d'onde λ de l'onde. Partons de la formule démontrée précédemment

$$(53) \qquad [A_i^*(\mathbf{r}'), E_j(\mathbf{r}'')] = -\frac{hc}{4\pi i}\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}''),$$

dans laquelle les rayons vecteurs $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}''$ repéreront les positions M' et M'' de deux points intérieurs à δv. Par hypothèse, le volume δv est occupé par un dispositif de mesure dont les indications fournissent les valeurs moyennes des champs dans δv. En intégrant les formules précédentes dans δv sur $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}''$ et en divisant ensuite par $(\delta v)^2$, on a

$$(54) \qquad \left[\frac{1}{\delta v}\int_{\delta v} A_i^*(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',\ \frac{1}{\delta v}\int_{\delta v} E_j(\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}''\right] = -\frac{hc}{4\pi i}\delta_{ij}\,\frac{1}{(\delta v)^2}\int_{\delta v} d\mathbf{r}'\int_{\delta v} d\mathbf{r}''\,\delta(r'-r'').$$

Mais on a

$$(55) \qquad \int_{\delta v} d\mathbf{r}'\int_{\delta v} d\mathbf{r}''\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') = \int_{\delta v} d\mathbf{r}' = \delta v$$

et, puisque l'on suppose la longueur d'onde beaucoup plus grande que les dimensions de δv, on aura

$$(56) \qquad [A_i^*(\mathbf{r}), E_j(\mathbf{r})] = \frac{hc}{4\pi i}\delta_{ij}\,\frac{1}{\delta v},$$

$\mathbf{r}$ repérant la position d'un certain point pris dans δv et les grandeurs entre crochets désignant désormais des valeurs moyennes dans δv.

Choisissons maintenant l'axe des z dans la direction du vecteur $\mathbf{k}$ et plaçons-nous dans le cas limite Maxwellien où l'on a $\mu_0 \sim 0$, $k \sim |\mathbf{k}|$. Écrivons la formule (56) en y faisant par exemple $i = j = 1$. Il vient

$$(57) \qquad [A_x^*(\mathbf{r}), E_x(\mathbf{r})] = -\frac{hc}{4\pi i}\,\frac{1}{\delta v}.$$

Or, on a alors

$$(58) \qquad H_y = -ikA_x; \qquad H_y^* = ikA_x^*.$$

Il vient donc

$$(59) \qquad [H_y^*(\mathbf{r}), E_x(\mathbf{r})] = -\frac{khc}{4\pi}\,\frac{1}{\delta v} = -\frac{h\nu}{2\,\delta v}.$$

La relation obtenue s'applique aux champs microscopiques complexes. Si nous passons aux champs macroscopiques réels grâce à la correspondance (52), nous trouvons

$$(60) \qquad [E_x^{(r)}(\mathbf{r}), H_y^{(r)}(\mathbf{r})] = [E_x(\mathbf{r}) + E_x^*(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}) + H_y^*(\mathbf{r})] = [E_x^*(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r})] + [E_x(\mathbf{r}), H_y^*(\mathbf{r})] = \frac{h\nu}{\delta v}.$$

Comme nous l'avons rappelé à la fin du dernier paragraphe, la relation de commutation (60) conduit pour les champs macroscopiques réels à la relation d'incertitude (48). On retrouve donc bien ainsi les relations de M. Heisenberg.

8. Introduction des fonctions D et Δ de MM. Pauli et Heisenberg [1]. — Nous allons donner aux relations de commutation des grandeurs électromagnétiques *réelles* une forme qui met bien en évidence le caractère invariant de ces relations, grâce à l'introduction de fonction D et Δ jouant dans l'espace-temps un rôle analogue à celui que joue dans l'espace la fonction singulière $\delta(\mathbf{r})$ de M. Dirac.

Pour faire nos raisonnements, nous admettrons : 1° que la correspondance entre les grandeurs électromagnétiques complexes et réelles est donnée par les formules du type (52); 2° que les grandeurs électromagnétiques peuvent être représentées par des développements de Fourier *où figurent seulement les ondes planes à énergie positive*. Ces hypothèses feront bientôt l'objet d'une étude approfondie.

Considérons deux points P_1 et P_2 de l'espace-temps. Soient t_1 et t_2 leurs coordonnées de temps dans un certain système de référence Galiléen; x_1, y_1, z_1, symbolisées par $\mathbf{r}_1$, x_2, y_2, z_2 symbolisées par $\mathbf{r}_2$ sont leurs coordonnées d'espace dans ce système. Nous posons

$$(61)\qquad t = t_2 - t_1, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \qquad r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

et nous cherchons la valeur du commutateur

$$(62)\qquad \begin{aligned}&[A_i^{(r)}(\mathbf{r}_1, t_1), A_j^{(r)}(\mathbf{r}_2, t_2)]\\ &\quad = [A_i(\mathbf{r}_1, t_1) + A_i^*(r_1, t_1), A_j(\mathbf{r}_2, t_2) + A_j^*(\mathbf{r}_2, t_2)].\end{aligned}$$

Conformément à l'hypothèse 2°, nous allons représenter les potentiels complexes par des développements de Fourier suivant les ondes planes à énergie *positive* sous la forme

$$(63)\qquad A_i(\mathbf{r}_1, t_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\mathbf{k}_1\, A_i(\mathbf{k}_1)\, e^{i(k_1 ct_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)}.$$

La règle de commutation (31) pour les amplitudes spectrales des potentiels peut s'écrire

$$(64)\qquad [A_i^*(\mathbf{k}_1), A_j(\mathbf{k}_2)] = -\frac{hc}{4\pi}\left(\delta_{ij} + \frac{k_i^{(2)} k_j^{(2)}}{k_0^2}\right)\frac{1}{k_2}\,\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

---

[1] Dans *Une nouvelle théorie de la Lumière*, tome II, à la fin, nous avons introduit les fonctions D et Δ. Malheureusement notre rédaction est incorrecte, parce que nous avons raisonné sur les grandeurs complexes et non sur les grandeurs réelles.

d'où l'on tire

$$(65)\qquad [A_i(\mathbf{k}_1),\ A_j^*(\mathbf{k}_2)] = [A_j^*(\mathbf{k}_2),\ A_i(\mathbf{k}_1)] = -[A_i^*(\mathbf{k}_1),\ A_j(\mathbf{k}_2)],$$

la dernière égalité venant de la symétrie en i et j de la formule (64). Pour passer de (64) à (65), il faut bien se souvenir que A_i et A_i^* sont des opérateurs distincts et ne sont pas des quantités complexes conjuguées : si l'on oubliait ce point essentiel, on serait amené, puisque le second membre de (64) est réel, à prendre le signe + au lieu du signe — au second membre de (65), ce qui serait erroné.

Comme les A commutent entre eux et que les A* commutent entre eux, on trouve

$$(66)\quad [A_i^{(r)}(\mathbf{r}_1,\ t_1),\ A_j^{(r)}(\mathbf{r}_2,\ t_2)]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\int d\mathbf{k}_1\, A_i^*(\mathbf{k}_1)\, e^{-i(k_1ct_1-\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)},\ \int d\mathbf{k}_2\, A_j(\mathbf{k}_2)\, e^{i(k_2ct_2-\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)}\right]$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\int d\mathbf{k}_1\, A_i(\mathbf{k}_1)\, e^{i(k_1ct_1-\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)},\ \int d\mathbf{k}_2\, A_j^*(\mathbf{k}_2)\, e^{-i(k_2ct_2-\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)}\right]$$
$$= -\frac{hc}{4\pi}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)\frac{1}{8\pi^3}$$
$$\times\left[\iint d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, e^{ic(k_2t_2-k_1t_1)}\, e^{-i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2-\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)}\,\frac{\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)}{k_2} - \text{conj.}\right]$$
$$= -\frac{hc}{4\pi}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)\frac{1}{8\pi^3}\left|\int d\mathbf{k}\,\frac{e^{i(kct-\mathbf{kr})}}{k} - \text{conj.}\right|.$$

Dans la dernière formule, nous avons écrit k au lieu de k_2, l'indice devenant inutile. Posons

$$(67)\qquad D(\mathbf{r},\ t) = \frac{i}{4\pi^2}\left|\int d\mathbf{k}\,\frac{e^{i(kct-\mathbf{kr})}}{k} - \text{conj.}\right| \qquad \text{avec}\quad k^2 = |\mathbf{k}|^2 + k_0^2.$$

Il vient

$$(68)\qquad [A_i^{(r)}(\mathbf{r}_1,\ t_1),\ A_j^{(r)}(\mathbf{r}_2,\ t_2)] = -\frac{hc}{8\pi^2 i}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)D(\mathbf{r},\ t).$$

Cette formule met bien en évidence l'invariance relativiste des relations de commutation entre potentiels, parce que $D(\mathbf{r},\ t)$ est un invariant d'espace-temps. L'invariance de D résulte, en effet, de sa définition (67) et de l'invariance du quotient $\frac{d\mathbf{k}}{k}$ précédemment démontrée.

Si, au lieu de partir de la relation de commutation entre potentiels, nous étions partis de la relation (24), le même raisonnement nous eût conduit à la formule

$$(69)\qquad [A_i^{(r)}(\mathbf{r}_1,\ t_1),\ E_j^{(r)}(\mathbf{r}_2,\ t_2)] = \frac{hc}{4\pi i}\,\delta_{ij}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}D(\mathbf{r},\ t).$$

Or, d'après (67), on a

$$(70)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{i}{4\pi^2}\left[i\int d\mathbf{k}\, e^{i(k_t t - \mathbf{kr})} - \text{conj.}\right],$$

et par suite

$$(71)\qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{1}{2\pi^2}\int d\mathbf{k}\, e^{-i\mathbf{kr}},$$

et d'après la formule (14) du Chapitre I,

$$(72)\qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\right)_{t=0} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}) = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (^1).$$

Donc, en faisant dans (69) $t_1 = t_2 = \tau$, l'on obtient

$$(73)\qquad [A_i^{(r)}(\mathbf{r}_1, \tau), A_j^{(r)}(\mathbf{r}_2, \tau)] = \frac{hc}{2\pi i}\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Cette formule correspond à la formule (39) donnant la commutation locale des grandeurs complexes A_i^* et E_j prises en des points différents de l'espace au même instant. Les formules (73) et (39) diffèrent cependant par un facteur 2 au second membre, cela provient de la subtitution des grandeurs macroscopiques réelles aux grandeurs microscopiques complexes.

Les formules précédentes sont générales et applicables à toute particule de spin 1 telle que le méson. Si l'on admet que la masse μ_0 est nulle ou négligeable (ce qui est possible pour le photon), on a $k = |\mathbf{k}|$ et la fonction $D(\mathbf{r}, t)$ prend une forme particulière introduite par MM. Jordan, Pauli et Heisenberg en théorie des champs. Nous désignerons cette forme dégénérée de D par $\Delta(\mathbf{r}, t)$. D'après (67), on a

$$(74)\qquad \Delta(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{4\pi^2}\left[\int d\mathbf{k}\,\frac{e^{i(k_t t - \mathbf{kr})}}{k} - \text{conj.}\right],$$

avec $k = |\mathbf{k}|$.

Calculons l'intégrale qui figure dans (74). En désignant par θ l'angle des vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{r}$, elle s'écrit

$$(75)\qquad \int_0^\infty d|\mathbf{k}|\int_0^{2\pi} 2\pi\,|\mathbf{k}|^2 \sin\theta\, d\theta\,\frac{e^{i(kct - \mathbf{kr})}}{k}.$$

(1) Les dérivées $\left(\frac{\partial D}{\partial x_i}\right)_{t=0}$ pour $i = 1, 2, 3$ sont nulles, ainsi que toutes les dérivées secondes de D pour $t = 0$.

En intégrant d'abord sur θ, il vient

$$(76)\qquad \int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}|\frac{2\pi|\mathbf{k}|^2}{k}e^{ikct}\int_{-1}^{+1}e^{-i|\mathbf{k}|rx}dx = \frac{2\pi}{ir}\int_0^{\infty}d|\mathbf{k}|\frac{|\mathbf{k}|}{k}e^{ikct}[e^{i|\mathbf{k}|r}-e^{-i|\mathbf{k}|r}],$$

et puisque nous admettons que $k = |\mathbf{k}|$,

$$(77)\qquad \frac{2\pi}{ir}\int_0^{\infty}[e^{ik(ct+r)}-e^{ik(ct-r)}]\,dk = -\frac{2\pi}{r}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{e^{ik(ct+r)}-1}{ct+r}-\frac{e^{ik(ct-r)}-1}{ct-r}\right].$$

Portons cette valeur de l'intégrale dans (74), nous trouvons

$$(78)\qquad \Delta(\mathbf{r},t) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{r}\left[\frac{\sin k(ct+r)}{\pi(ct+r)}-\frac{\sin k(ct-r)}{\pi(ct-r)}\right].$$

Or on a

$$(79)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\sin kx}{\pi x} = \delta(x),$$

comme cela résulte de la première formule (14) du Chapitre I. Donc enfin

$$(80)\qquad \Delta(\mathbf{r},t) = \frac{\delta(ct+r)-\delta(ct-r)}{r}.$$

Telle est la fonction singulière généralisant celle de Dirac dans l'espace-temps qui a été introduite par MM. Jordan, Pauli et Heisenberg en théorie quantique des champs.

9. **Propriétés diverses des fonctions D et Δ. Interprétation des relations de commutation obtenues.** — La fonction $D(\mathbf{r},t)$ définie par (67), est une fonction paire de $\mathbf{r}$, mais une fonction impaire de t, comme on le voit aisément en changeant t en $-t$ et k en $-k$ dans (67). On a donc

$$(81)\qquad D(\mathbf{r},-t) = -D(\mathbf{r},t),\qquad D(\mathbf{r},0)=0.$$

On a naturellement aussi $\Delta(\mathbf{r},0)=0$, comme on peut d'ailleurs le vérifier sur l'expression (80).

La fonction Δ n'est différente de zéro que sur le cône de lumière relatif au point $\mathbf{r}=t=0$ de l'espace-temps. Elle correspond à des actions qui se propagent avec la vitesse de la lumière. Elle satisfait

d'ailleurs à l'équation $\square \Delta = 0$, ce qui se voit tout de suite sur la définition (74).

Au contraire, la fonction $D(\mathbf{r}, t)$ correspondant au cas général où k_0 n'est pas nul, satisfait à l'équation

$$\square D + k_0^2 D = 0. \tag{82}$$

Il y a donc un phénomène de *traînage* dans la propagation de D, seul le front des ondes se propage avec la vitesse c, le reste de l'onde s'éparpillant à l'arrière de ce front. Il en résulte que $D(\mathbf{r}, t)$ n'est nulle qu'à *l'extérieur* du cône de lumière relatif au point d'espace-temps $t = \mathbf{r} = 0$ et a, en général, une valeur différente de zéro, à l'intérieur de ce cône.

On peut voir que $D(\mathbf{r}, t)$ est bien nulle à l'extérieur du cône de lumière relatif à l'origine par le raisonnement suivant. Nous savons que $D(\mathbf{r}, 0) = 0$; or tout point de l'espace-temps qui se trouve en dehors du double cône de lumière relatif à l'événement origine peut être rendu simultané de cet événement origine par une transformation convenable de Lorentz, transformation qui ne modifiera pas la fonction D, puisque celle-ci est un invariant relativiste, il en résulte que D doit être nulle pour tout point extérieur au dit cône de lumière.

Ces diverses remarques permettent d'interpréter physiquement le sens des relations de commutation des potentiels et des champs. Ces relations contenant au second membre la fonction D (ou ses dérivées), les commutateurs des premiers membres ne peuvent être différents de zéro que si les grandeurs électromagnétiques se rapportent à des points d'espace-temps $r_1 t_1$ et $r_2 t_2$ tels que $D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_2 - t_2)$ (ou ses dérivées) soit différente de zéro. Il en résulte que ces commutateurs sont nécessairement nuls si l'un des points en question est en dehors du cône de lumière de l'autre. En ce cas, les deux grandeurs électromagnétiques sont en principe toutes deux mesurables exactement. Physiquement, ce résultat signifie que deux grandeurs électromagnétiques sont nécessairement toutes deux mesurables exactement si les points d'espace-temps auxquels elles se rapportent sont sans influence possible l'un sur l'autre, énoncé dont l'exactitude est évidente *a priori*.

Dans le cas où l'on néglige k_0^2 et où Δ remplace D dans les formules, on voit que deux grandeurs électromagnétiques seront toujours simultanément connaissables si elles se rapportent à des points d'espace-temps qui ne sont pas *en onde* l'un avec l'autre, c'est-à-dire qui ne sont pas sur un même cône de lumière : ce résultat, lui ausssi, est nécessaire

a priori, car la mesure effectuée en $\mathbf{r}_1$ au temps t_1 ne peut alors troubler la mesure effectuée en $\mathbf{r}_2$ au temps t_2 que si $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = c(t_1 - t_2)$.

La façon dont les relations de commutation des champs traduisent l'impossibilité dans certains cas de mesurer ces grandeurs en des lieux et des temps différents a été analysée de près par MM. Bohr et Rosenfeld. On trouvera un aperçu de ces intéressantes considérations dans le livre de M. Heitler [*Quantum theory of radiation* (p. 75 et suiv.)].

CHAPITRE IX.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON ET LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

1. Définition des grandeurs électromagnétiques comme valeurs moyennes dans l'espace des n. — Considérons une grandeur électromagnétique définie par la Mécanique ondulatoire du photon, par exemple l'une des composantes du potentiel-vecteur A_i. Nous pouvons la développer suivant le procédé de Fourier en une somme d'ondes planes monochromatiques de la forme

$$A_i(x, y, z, t) = \sum_l c_l a_l e^{i[k_l c t - \mathbf{k}_l \mathbf{r}]}, \tag{1}$$

a_l étant un coefficient de normalisation des ondes planes. La seconde quantification transforme les c_l et par suite les A_i en opérateurs de l'espace des n. Comme nous l'avons précédemment expliqué, on est alors amené à définir la grandeur physique A_i comme moyenne prise dans l'espace des n suivant le schéma

$$\overline{A_i(\mathbf{r}, t)} = \sum_n R^* A_i(\mathbf{r}, t) R = \sum_n R^* \sum_l c_l a_l e^{i[k_l c t - \mathbf{k}_l \mathbf{r}]} R. \tag{2}$$

Nous avons vu que la fonction de répartition R obéit à l'équation d'évolution

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial R}{\partial t} = \mathcal{H} R, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{H} = \sum_{ij} (c_i^*)_{\text{op}} V_{ij}^{(0)}(t) (c_j)_{\text{op}}. \tag{3}$$

Mais, pour le photon dans le vide, il n'y a ni interaction mutuelle, ni action extérieure, de sorte que $V^{(0)}$ est nul et que R est indépendant du temps. La fonction de répartition ainsi définie est donc la forme $R(n_1, n_2, \ldots)$ et *est indépendante du temps*. Il est alors visible que $\overline{A_i(\mathbf{r}, t)}$ varie en fonction des variables d'espace et de temps

exactement comme $A_i(\mathbf{r}, t)$: les grandeurs électromagnétiques, définies comme valeurs moyennes dans l'espace des n, satisfont donc à toutes les équations maxwelliennes.

On peut se placer à un autre point de vue pour définir les valeurs moyennes dans l'espace des n. D'après une remarque faite à la fin du paragraphe 5 du Chapitre VII, nous pouvons ainsi définir la fonction R comme solution de l'équation

$$(4) \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial R}{\partial t} = \mathcal{H} R, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{H} = \sum_{ij} (c_i^*)_{op} H_{ij}^{(0)} (c_j)_{op}.$$

Pour le photon dans le vide, on aura $H_{ij}^{(0)} = h\nu_i \delta_{ij}$ et par suite

$$(5) \qquad \mathcal{H} = \sum_{ij} c_i^* h\nu_i \delta_{ij} c_j = \sum_j c_j^* c_j h\nu_j = \sum_j n_j h\nu_j,$$

d'où

$$(6) \qquad R(n_1, n_2, \ldots, t) = R_1(n_1, n_2, \ldots) e^{\frac{2\pi i}{h}\sum_j n_j h\nu_j t},$$

$R_1(n_1, n_2, \ldots)$ étant la fonction de répartition telle qu'elle avait été définie plus haut. La définition (2) s'écrira maintenant

$$(7) \qquad \overline{A_i(\mathbf{r}, t)} = \sum_n R_1^*(n_1, n_2, \ldots) A_i(\mathbf{r}, t) R_1(n_1, n_2, \ldots).$$

Montrons que cette expression est équivalente à

$$(8) \qquad \begin{aligned} \overline{A_i(\mathbf{r}, t)} &= \sum_n R^*(n_1, n_2, \ldots, t) A_i(\mathbf{r}, 0) R(n_1, n_2, \ldots, t) \\ &= \sum_n R_1^*(n_1, n_2, \ldots) e^{-\frac{2\pi i}{h}\sum_j n_j h\nu_j t} \\ &\quad \times \sum_l c_l a_l e^{-i\mathbf{k}_l\mathbf{r}} R_1(n_1, n_2, \ldots) e^{\frac{2\pi i}{h}\sum_m n_m h\nu_m t}. \end{aligned}$$

En effet, l'opérateur c_l commutant avec tous les n_i, sauf n_l, la dernière expression est égale à

$$(9) \qquad \sum_n R_1^*(n_1, n_2, \ldots) \sum_l e^{-2\pi i n_l \nu_l t} c_l a_l e^{2\pi i n_l \nu_l t} R_1(n_1, n_2, \ldots) e^{-i\mathbf{k}_l\mathbf{r}},$$

soit, encore d'après les propriétés de l'opérateur c_l à

(10) $$\sum_n R_1^*(n_1, n_2, \ldots) \sum_l a_l c_l e^{2\pi i \nu_l t} e^{-i\mathbf{k}_l \mathbf{r}} R_1(n_1, n_2, \ldots)$$
$$= \sum_n R_1(n_1, \ldots) A_l(\mathbf{r}, t) R_1(n_1, \ldots),$$

de sorte que l'équivalence annoncée est démontrée.

Ainsi, l'on peut définir une grandeur électromagnétique F comme valeur moyenne dans l'espace des n de deux manières équivalentes : 1° en prenant la valeur moyenne de l'opérateur dépendant du temps $F(\mathbf{r}, t) = \sum_l c_l a_l e^{i(\nu_l t - \mathbf{k}_l \mathbf{r})}$ avec emploi de la fonction de répartition indépendante du temps $R(n_1, n_2, \ldots)$; 2° en prenant la valeur moyenne de l'opérateur indépendant du temps $F(\mathbf{r}) = \sum_l c_l a_l e^{-i\mathbf{k}_l \mathbf{r}}$ avec emploi de la fonction de répartition dépendante du temps

$$R(n_1, n_2, \ldots, t) = R_1(n_1, n_2, \ldots) e^{2\pi i \sum_l n_l \nu_l t}.$$

On a donc, d'après ce qui précède,

(11) $$\overline{F(\mathbf{r}, t)} = e^{-\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H} t}\, \overline{F(r)}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\mathcal{H} t}.$$

Les définitions (7) et (8) sont équivalentes. La première est celle qui se présente le plus naturellement en Mécanique ondulatoire du photon, tandis que la seconde est celle qui est usuellement utilisée en théorie quantique des champs.

La dérivée $\frac{d}{dt}\overline{F(r, t)}$ est donnée par la formule générale

(12) $$\frac{d}{dt}\overline{F} = \frac{\overline{\partial F}}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h}\overline{[F, \mathcal{H}]}.$$

Comme ici l'intégration est faite dans l'espace des n (et non sur xyz) la dérivée $\frac{d\overline{F}}{dt}$ reste fonction de xyz. Si l'on emploie la première définition de F, on doit poser $\mathcal{H} = 0$ et par suite

(13) $$\frac{d\overline{F}}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial t} = \sum_n R_1^*(n_1, \ldots) \frac{\partial F}{\partial t} R_1(n_1, \ldots)$$
$$= \sum_n R_1^*(n_1, \ldots) \sum_l 2\pi i \nu_l c_l a_l e^{i(\nu_l t - \mathbf{k}_l \mathbf{r})} R_1(n_1, \ldots).$$

Avec la deuxième définition, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ et l'on a

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{d\overline{F}}{dt} &= \frac{2\pi i}{h}[\mathbf{F}, \mathcal{H}] \\ &= \frac{2\pi i}{h}\sum_n R_1^*(n_1,\ldots)\,e^{-2\pi i\sum_k n_k\nu_k t} \\ &\quad\times\left[\sum_l c_l a_l e^{-i\mathbf{k}_l\mathbf{r}}, \sum_j n_j h\nu_j\right] R_1(n_1,\ldots)\,e^{2\pi i\sum_m n_m\nu_m t} \\ &= \sum_n R_1^*(n_1,\ldots)\sum_l 2\pi i\nu_l c_l a_l e^{i[k_l ct-\mathbf{k}_l\mathbf{r}]} R_1(n_1, n_2,\ldots), \end{aligned}$$

de sorte qu'on trouve bien la même valeur (13).

Il est facile de voir que nos définitions font correspondre la grandeur électromagnétique F à l'*absorption* d'un photon et la grandeur F^* à l'*émission* d'un photon, point de vue que nous retrouverons dans l'étude des interactions entre matière et rayonnement. En effet, si l'on pose

$$(15)\qquad F = \sum_l c_l a_l e^{i[k_l ct-\mathbf{k}_l\mathbf{r}]},$$

on aura

$$(16)\qquad \begin{aligned} \overline{F} &= \sum_n R_1^*(n_1,\ldots,n_l,\ldots)\sum_l c_l a_l e^{i[k_l ct-\mathbf{k}_l\mathbf{r}]} R_1(n_1,\ldots,n_l,\ldots) \\ &= \sum_n R_1^*(n_1,\ldots,n_l,\ldots)\sum_l \sqrt{n_l+1}\,a_l e^{i[k_l ct-\mathbf{k}_l\mathbf{r}]} R_1(n_1,\ldots,n_l+1,\ldots). \end{aligned}$$

Cette formule montre bien que la composante d'ordre l de F correspond au passage d'une répartition où il y a n_l+1 photons dans l'état $\mathbf{k}_l$ à une répartition où il n'y a plus que n_l photons dans cet état.

De même

$$(17)\qquad \begin{aligned} \overline{F^*} &= \sum_n R_1^*(n_1,\ldots,n_l,\ldots)\sum_l c_l^* a_l^*\, e^{-i[k_l ct-\mathbf{k}_l\mathbf{r}]} R_1(n_1,\ldots,n_l,\ldots) \\ &= \sum_n R_1^*(n_1,\ldots,n_l,\ldots)\sum_l \sqrt{n_l}\,a_l^*\, e^{-i[k_l ct-\mathbf{k}_l\mathbf{r}]} R_1(n_1,\ldots,n_l-1,\ldots), \end{aligned}$$

ce qui montre que la composante l de F^* correspond au passage d'une répartition où il y a n_l-1 photons, dans l'état $\mathbf{k}_l$ à une répartition où il y a n_l photons dans cet état. Comme l'exponentielle à exposant négatif de (17) représente un état à énergie négative du photon, nous

voyons que les états à énergie négative sont liés au processus d
l'émission tandis que les états à énergie positive correspondent a
processus de l'absorption, remarque que nous aurons à approfondir.

2. Développement des champs. — Comment devons-nous écrire les développements d
Fourier et quel sens devons-nous leur attribuer? Pour répondre à cett
question délicate, nous pouvons adopter deux points de vue différent:
Le premier qui coïncide (à quelques détails de formalisme près) avec l
forme usuelle de la théorie quantique des champs, fait figurer dans le
développements de Fourier les ondes à énergie négative, mais n'introdu
pas l'état d'annihilation. Le second point de vue, qui est propre à l
Mécanique ondulatoire du photon, ne retient dans les développemen
de Fourier que les ondes à énergie positive, mais elle fait interven
l'état d'annihilation. Nous allons étudier successivement ces deux poin
de vue pour en faire la comparaison.

Commençons pour exposer le premier point de vue.

Dans cette méthode, on représente toutes les grandeurs liées à un
particule de spin 1 par des développements de Fourier contenant no
seulement toutes les ondes planes à énergie positive, mais aussi toute
les ondes planes à énergie négative. On utilise donc des développemen
de la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} F &= \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i[kct-\mathbf{kr}]} + \sum_{\mathbf{k}} d^{*}_{\mathbf{k}} a^{*}_{\mathbf{k}} e^{-i[kct-\mathbf{kr}]},\\ F^{*} &= \sum_{\mathbf{k}} c^{*}_{\mathbf{k}} a^{*}_{\mathbf{k}} e^{-i[kct-\mathbf{kr}]} + \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i[kct-\mathbf{kr}]},\end{aligned}\right.$$

avec

$$(19)\qquad k = +\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2},$$

k_0 étant supposé nul dans le cas du photon.

Dans (18), les termes de la première somme représentent des ond
planes à énergie positive $\frac{khc}{2\pi}$ ayant une quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$, tand
que les termes de seconde somme représentent des ondes plan
à énergie négative $-\frac{khc}{2\pi}$ ayant une quantité de mouvement $-\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$
Les $a_{\mathbf{k}}$ sont des coefficients de normalisation. Quant aux $c_{\mathbf{k}}$ et $d_{\mathbf{k}}$
ce sont des opérateurs de l'espace des n dont la signification va vari
suivant qu'on a affaire à une particule de spin 1 susceptible de deux éta

de charge égale et de signe contraire ou à une particule non chargée. Nous avons donc à distinguer deux cas :

a. [illegible] particule de spin 1 possédant deux états de charge opposée.

Ceci est le [illegible] ons qui portent tantôt la charge e de l'électron positif, tantôt la charge $-e$ de l'électron négatif.

Si l'on adopte les développements de Fourier (18), la question qui se pose est celle de savoir comment on doit interpréter les termes à énergie négative de la seconde somme, étant donné qu'il ne paraît pas exister réellement d'états à énergie négative dans la nature. La théorie quantique des champs adopte pour ces termes l'interprétation suivante : tandis que chaque terme à énergie positive représente une particule *chargée positivement* d'énergie positive $\frac{khc}{2\pi}$ et de quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$, l'onde d'énergie négative $-\frac{khc}{2\pi}$ et de quantité de mouvement $-\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$ devrait être interprétée comme représentant une particule *chargée négativement*, possédant l'énergie *positive* $\frac{khc}{2\pi}$ et la quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$. Ainsi, il n'y aurait plus, conformément à l'expérience, que des particules à énergie positive, les ondes à énergie négative n'étant qu'une représentation symbolique de particules à énergie positive dont la charge électrique serait égale et opposée de celle des particules que représentent les ondes à énergie positive.

Selon cette ingénieuse interprétation, la quantité $n_{\mathbf{k}}^{+} = c_{\mathbf{k}}^{*} c_{\mathbf{k}}$ donnera le nombre des particules chargées positivement ayant l'énergie $\frac{khc}{2\pi}$ et la quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$, tandis que le nombre $n_{\mathbf{k}}^{-} = d_{\mathbf{k}}^{*} d_{\mathbf{k}}$ donnera le nombre des particules chargées négativement ayant la même énergie et la même impulsion.

On posera donc

$$(20)\quad \begin{cases} c_{\mathbf{k}} = e^{\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}^{+}}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{+}}, & c_{\mathbf{k}}^{*} = \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{+}}\, e^{-\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}^{+}}}, \\ d_{\mathbf{k}} = e^{\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}^{-}}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-}}, & d_{\mathbf{k}}^{*} = \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-}}\, e^{-\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}^{-}}}. \end{cases}$$

d'où résulte

$$(21)\quad c_{\mathbf{k}}^{*} c_{\mathbf{k}} - c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{*} = -1; \qquad d_{\mathbf{k}}^{*} d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^{*} = -1.$$

b. Cas d'une particule de spin 1 électriquement neutre.

C'est le cas des mésons neutres et des photons.

Ici, l'interprétation précédente des termes à énergie négative n'est plus possible, puisqu'il n'y a plus lieu de distinguer deux états de charge électrique pour la particule. S'appuyant sur des idées que nous avons exposées à la fin du paragraphe 2 du Chapitre II, la théorie quantique des champs admet que la grandeur F pour une particule neutre doit être réelle, c'est-à-dire que l'on doit avoir ici

$$c_{\mathbf{k}} = d_{\mathbf{k}}, \qquad c_{\mathbf{k}}^{*} = d_{\mathbf{k}}^{*}, \tag{22}$$

de sorte que

$$F = F^{*} = \sum_{\mathbf{k}} \left[c_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i(kct - \mathbf{kr})} + c_{\mathbf{k}}^{*} a_{\mathbf{k}}^{*} e^{-i(kct - \mathbf{kr})} \right]. \tag{23}$$

On justifie l'hypothèse (22) en montrant que le calcul de la charge électrique totale du champ considéré se trouve alors toujours nulle, nous le vérifierons plus loin. Cette valeur nulle de la charge se trouve obtenue par une compensation de charges opposées, les particules neutres apparaissent ainsi comme des sortes de *racémiques*, neutres par compensation. Nous verrons cependant qu'on peut, avec la Mécanique ondulatoire du photon, se placer à un point de vue différent.

3. **Conséquences des définitions adoptées au paragraphe précédent.** — Adoptant les définitions et hypothèses qui viennent d'être précisées, nous calculerons la valeur que la théorie quantique des champs est amenée à attribuer à certaines grandeurs importantes liées à la particule de spin 1.

a. *Cas des particules chargées*. — Calculons d'abord l'énergie du champ, c'est-à-dire de l'ensemble des particules, par la formule

$$W = \int_{V} \frac{1}{2c} \left[\left(\mathbf{A}^{*} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{E}^{*} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}^{*}}{\partial t} \right) - \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{A}^{*}}{\partial t} \right) \right] d\tau. \tag{24}$$

Cette intégrale se réduit à la somme de celles qui se rapportent aux divers vecteurs $\mathbf{k}$ considérés isolément, car les termes provenant de la combinaison de deux vecteurs $\mathbf{k}$ différents disparaissent par intégration. Pour les grandeurs normées relatives à un vecteur $\mathbf{k}$ donné, on trouve, d'après (18),

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \sqrt{\dfrac{hc}{4\pi k\nu}} \left[c_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^{*} P_{\mathbf{k}}^{*} \right]_{r}, \\ \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -ik\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \sqrt{\dfrac{hc}{4\pi k\nu}} \left[c_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^{*} P_{\mathbf{k}}^{*} \right], \end{cases} \tag{25}$$

$a_{\mathbf{k}}$ étant un vecteur unité définissant la direction du potentiel-vecteur et $P_{\mathbf{k}}$ étant le facteur de phase $e^{i(k_0 t - \mathbf{kr})}$.

En portant (25) dans (24), on trouve pour les termes se rapportant au vecteur $\mathbf{k}$, compte tenu du fait que les termes en $P_{\mathbf{k}}^2$ et $P_{\mathbf{k}}^{*2}$ donnent zéro par intégration, la valeur

$$(26) \qquad W = \frac{khc}{4\pi}\left[c_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^* + c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^* + d_{\mathbf{k}}^* d_{\mathbf{k}}\right] = \frac{khc}{2\pi}(n_{\mathbf{k}}^+ + n_{\mathbf{k}}^- + 1).$$

Pour obtenir la dernière expression, on a fait intervenir les relations (21).

Le résultat (26) n'est pas très satisfaisant, car on devrait évidemment avoir dans la dernière parenthèse, $n_{\mathbf{k}}^+ + n_{\mathbf{k}}^-$. Le terme 1 supplémentaire est certainement parasite et sa présence peut faire douter de l'exactitude rigoureuse du point de vue adopté par la théorie des champs.

Calculons maintenant la quantité de mouvement totale du champ. Elle est donnée par les formules du type

$$(27) \qquad G_x = \int_v \frac{1}{2c}\left[\left(\mathbf{A}^* \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\right) - \left(\mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x}\right) - \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial x}\right)\right] d\tau.$$

Avec les expressions (25), on trouve aisément

$$(28) \qquad G_x = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_x h}{2\pi}(n_{\mathbf{k}}^+ + n_{\mathbf{k}}^- + 1).$$

Ici encore, apparaît un terme parasite, mais il n'est pas gênant, car il est évident qu'il disparaît dans la sommation sur toutes les valeurs de k_x. Il reste donc

$$(29) \qquad \mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} h}{2\pi}(n_{\mathbf{k}}^- + n_{\mathbf{k}}),$$

formule très satisfaisante, étant données les hypothèses admises.

Enfin calculons l'intégrale

$$(30) \qquad \int_v \rho \, d\tau = \int_v \frac{2\pi i}{hc}\left[(\mathbf{A}^* \mathbf{E}) - (\mathbf{E}^* \mathbf{A})\right] d\tau.$$

Nous trouvons

$$(31) \qquad \int_v \rho \, d\tau = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\left[c_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}} + c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^* - d_{\mathbf{k}}^* d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^*\right] = \sum_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}}^+ - n_{\mathbf{k}}^-).$$

Nous obtenons donc la *différence* entre le nombre des particules chargées positivement et celui des particules chargées négativement.

Ce résultat découle du fait, déjà précédemment signalé, que pour une onde à énergie négative l'intégrale (31) est négative et égale à — 1 si l'onde est normée. En présence de ce fait, la théorie quantique des champs se refuse à attacher à l'intégrale $\int_v \rho \, d\tau$ le sens physique d'un nombre de particules, mais elle continue à définir *la charge électrique totale* des particules liées au champ par l'intégrale $\int_v \rho\varepsilon \, d\tau$, où ε est la charge d'une des particules en valeur absolue. On trouve, en effet, pour cette dernière intégrale d'après (31)

$$Q = \int_v \rho\varepsilon \, d\tau = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(n_{\mathbf{k}}^{+} - n_{\mathbf{k}}^{-}), \tag{32}$$

résultat satisfaisant.

b. Cas des particules neutres. — Ici l'on admet les relations (22). Le formalisme employé par la théorie quantique des champs ([1]) conduit alors à des résultats qui se déduisent des précédents en posant $n_{\mathbf{k}}^{+} = n_{\mathbf{k}}^{-} = n_{\mathbf{k}}$ et en divisant par 2. On obtient ainsi

$$W = \sum_{\mathbf{k}} \frac{khc}{2\pi}\left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right), \tag{33}$$

résultat qui contient encore un facteur parasite $\frac{1}{2}$. Puis on trouve

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}h}{2\pi}\left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}h}{2\pi}. \tag{34}$$

Dans $\mathbf{G}$, comme précédemment, le facteur parasite disparaît par sommation. Enfin, on a

$$Q = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(n_{\mathbf{k}}^{+} - n_{\mathbf{k}}^{-}) = 0. \tag{35}$$

La charge totale du champ se trouve nulle par suite d'une sorte de compensation des charges. C'est là le résultat annoncé qui sert à justifier le formalisme adopté pour les particules neutres par la théorie quantique des champs. Néanmoins, on peut observer que l'on obtiendrait aussi $Q = 0$ en exprimant naïvement la neutralité électrique des particules par la relation $\varepsilon = 0$. Cette remarque nous conduit à aborder

([1]) Le facteur $\frac{1}{2}$ résulte de la façon dont est définie la normalisation.

maintenant l'examen du point de vue de la Mécaniqur ondulatoire du photon.

4. Point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon. — Nous allons nous placer d'abord dans le cadre de la Mécanique ondulatoire du photon proprement dite, théorie qui ne s'occupe que des photons, c'ést-à-dire de particules électriquement neutres.

En Mécanique ondulatoire du photon, on est naturellement conduit à adopter le point de vue suivant lequel *les grandeurs électromagnétiques complexes* F *liées au photon doivent se représenter par des développements de Fourier limités aux ondes planes à énergie positive*, c'est-à-dire de la forme

$$(36) \qquad F = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i(kct-\mathbf{kr})}, \qquad F^{*} = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{*} a_{\mathbf{k}}^{*} e^{-i(kct-\mathbf{kr})}.$$

Pour notre théorie, les grandeurs sont toujours essentiellement complexes et c'est seulement les grandeurs macroscopiquement observables dans les champs à grands nombres de photons qui peuvent se représenter par les grandeurs $F^{(r)} = F + F^{*}$.

Nous commencerons par calculer avec notre hypothèse le nombre total N des photons présents dans le champ, nombre qui doit toujours être donné par l'intégrale (30). Avec les développements du type (36), le calcul donne

$$(37) \qquad N = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^{*} c_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}},$$

ce qui est tout à fait satisfaisant.

Si nous voulons calculer W et **G**, il se pose à nous une question préliminaire très importante : quelles expressions devons-nous adopter pour ces grandeurs? Plus haut nous avions adopté, comme le fait implicitement la théorie quantique des champs sous sa forme usuelle, les expressions (24) et (27), qui résultent des valeurs des composantes T_{ik} du tenseur énergie-impulsion données par les formules (4) du Chapitre IV. Ces formules résultaient de l'introduction d'un schéma Lagrangien général, avec emploi d'une fonction de Lagrange *réelle*. Mais, comme nous l'avons remarqué à la fin du paragraphe 1 du Chapitre IV, il est plus conforme aux idées générales de la Mécanique ondulatoire d'adopter une fonction de Lagrange complexe et de prendre pour les expressions des T_{ik} des valeurs non nécessairement réelles,

telles que la valeur de la densité d'énergie donnée par la formule (12) du paragraphe en question. Ceci revient en somme à partir des formules générales

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} W &= \int_v \Psi^*_{\sigma\tau} H \Psi_{\sigma\tau}\,d\tau = \int_v \Psi^*_{\sigma\tau} \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi_{\sigma\tau}}{\partial t}\,d\tau,\\ G_x &= \int_v \Psi^*_{\sigma\tau}\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi_{\sigma\tau}\,d\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, en exprimant les $\Psi_{\sigma\tau}$ à l'aide des grandeurs électromagnétiques,

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} W &= \int_v \frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{A}^*\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) - \left(\mathbf{E}^*\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\right]d\tau,\\ G_x &= -\int_v \frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{A}^*\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\right) - \left(\mathbf{E}^*\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)\right]d\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Dans les expressions (39), comme toujours en Mécanique ondulatoire du photon, on a les produits d'une grandeur étoilée placée à gauche par une grandeur non étoilée placée à droite. Dans la théorie non superquantifiée, les expressions (39) sont équivalentes aux expressions (24) et (27) utilisées par la théorie quantique des champs, mais il n'en est pas de même en théorie superquantifiée, parce que l'opérateur $c_{\mathbf{k}}$ n'est pas conjugué de l'opérateur $c^*_{\mathbf{k}}$. Il y a donc un certain arbitraire dans le choix des expressions (24) et (27) fait par la théorie des champs et il semble licite d'adopter en Mécanique ondulatoire du photon les valeurs (39).

Si nous adoptons les expressions (39), le calcul fournit aisément

$$(40)\qquad W = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \frac{khc}{2\pi}, \qquad \mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}h}{2\pi},$$

valeurs entièrement satisfaisantes.

Le formalisme adopté par la Mécanique ondulatoire du photon nous paraît plus près de la réalité physique que celui de la théorie quantique des champs. Nous allons le préciser en faisant intervenir l'état d'annihilation et les moyennes dans l'espace des n. Ceci nous conduira à l'idée que le véritable rôle des ondes planes à énergie négative est de représenter les processus d'émission, tandis que celui des ondes planes à énergie positive est de représenter les processus d'absorption.

5. Valeurs moyennes dans l'espace des n. Processus d'absorption et d'émission. — Nous allons maintenant reprendre systématiquement le point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon esquissé au paragraphe précédent, mais en y introduisant les notions d'état d'annihilation et de valeurs moyennes dans l'espace des n.

Reprenons toute la suite des idées. En Mécanique ondulatoire du photon non superquantifiée, l'on associe à chaque grandeur électromagnétique un opérateur $\mathcal{F}$. Un photon, qui se trouve dans l'état représenté par une fonction d'onde Ψ, peut s'annihiler au contact de la matière en cédant toute son énergie à la matière et en passant dans un état d'annihilation que l'on représente par une fonction d'annihilation constante et invariante $\Psi^{(0)}$. La grandeur électromagnétique F correspondant à l'opérateur $\mathcal{F}$ est égale par définition à

$$(41) \qquad F = \Psi^{(0)*}_{\sigma\tau} \mathcal{F} \Psi_{\sigma\tau} = \Psi^{(0)} \mathcal{F} \Psi,$$

la deuxième expression étant une forme symbolique simplifiée de la première. La grandeur F correspond à la transition quantique qui amène dans l'état d'annihilation le photon primitivement dans l'état Ψ, c'est-à-dire qu'elle correspond à l'*absorption* de ce photon par la matière. Réciproquement, la grandeur complexe conjuguée (¹)

$$(42) \qquad F^* = \Psi^*_{\sigma\tau} \mathcal{F} \Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = \Psi^* \mathcal{F} \Psi^{(0)}$$

représente la grandeur électromagnétique associée à l'*émission* d'un photon dans l'état Ψ.

Nous admettrons que l'onde Ψ la plus générale doit être représentée par la superposition de l'onde $\Psi^{(0)}$ et des ondes planes monochromatiques à énergie positive du type

$$(43) \qquad \Psi_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} e^{i(kct - \mathbf{k}r)},$$

avec $k = +\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2}$. Nous laissons donc de côté systématiquement les ondes planes à énergie négative conformément au point de vue développé dans le dernier paragraphe (²) et nous poserons

$$(44) \qquad \Psi = c_0 \Psi^{(0)} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}},$$

(¹) Pour passer de (41) à (42), se souvenir que $\mathcal{F}$ est hermitien.

(²) L'hypothèse qui consiste à écarter les ondes à énergie négative pour ne conserver que celles à énergie positive présente une certaine analogie avec l'hypothèse que l'on fait dans la théorie classique du rayonnement quand on néglige les potentiels avancés pour ne garder que les potentiels retardés.

les $\Psi_{\mathbf{k}}$ étant normées. Nous obtenons donc pour la densité de valeur moyenne correspondant à l'opérateur $\mathcal{F}$ de l'espace ordinaire

$$(45)\qquad \rho(\mathcal{F})=\Big(c_0^*\Psi^{(0)}+\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}^*\Psi_{\mathbf{k}}^*\Big)\mathcal{F}\Big(c_0\Psi^{(0)}+\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{k}}\Big).$$

Introduisons maintenant la seconde quantification : les $c_{\mathbf{k}}$ et $c_{\mathbf{k}}^*$ deviennent des opérateurs de l'espace des n définis par les formules

$$(46)\qquad c_{\mathbf{k}}=e^{\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}}\sqrt{n_{\mathbf{k}}},\qquad c_{\mathbf{k}}^*=\sqrt{n_{\mathbf{k}}}\,e^{-\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}}$$

et $\rho(\mathcal{F})$ se trouve ainsi transformé en un opérateur de l'espace des n

Nous devons alors remarquer que le nombre n_0 des photons dans l'état d'annihilation doit être considéré comme énorme et pratiquement constant. Les opérateurs $e^{\pm\frac{\partial}{\partial n_0}}$, qui font varier n_0 d'une unité en plus ou en moins, ne modifient donc pratiquement pas les fonctions de n auxquelles ils sont appliqués et sont, par suite, équivalents à l'opérateur 1. On a donc

$$(47)\qquad c_0\sim c_0^*\sim\sqrt{n_0}.$$

Revenons à l'expression (45) et observons que, d'après la forme des opérateurs $\mathcal{F}$ introduits par la Mécanique ondulatoire du photon dans l'expression des grandeurs électromagnétiques et d'après la valeur de $\Psi^{(0)}$, on a toujours

$$(48)\qquad \Psi^{(0)}\mathcal{F}\Psi^{(0)}=0,$$

comme on le vérifie aisément. De plus, comme n_0 est extrêmement grand, on peut dans l'expression (45) négliger les termes qui ne contiennent ni c_0, ni c_0^* et écrire

$$(49)\qquad \rho(\mathcal{F})=c_0^*\Psi^{(0)}\mathcal{F}\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{k}}+\sum_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}^*\Psi_{\mathbf{k}}^*\mathcal{F}c_0\Psi^{(0)}.$$

Comme $\rho(\mathcal{F})$ est maintenant un opérateur de l'espace des n, on devra, pour lui faire correspondre une grandeur numérique, prendre sa valeur moyenne $\overline{\mathrm{F}}=\overline{\rho(\mathcal{F})}$ dans l'espace des n, ce qui donnera

$$(50)\qquad \overline{\mathrm{F}}=\overline{\rho(\mathcal{F})}=\sum_n \mathrm{R}_1^*(n_0,\ldots,n_{\mathbf{k}},\ldots)\,\rho(\mathcal{F})\,\mathrm{R}_1(n_0,\ldots,n_{\mathbf{k}},\ldots).$$

5. Valeurs moyennes dans l'espace des n. Processus d'absorption et d'émission. — Nous allons maintenant reprendre systématiquement le point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon esquissé au paragraphe précédent, mais en y introduisant les notions d'état d'annihilation et de valeurs moyennes dans l'espace des n.

Reprenons toute la suite des idées. En Mécanique ondulatoire du photon non superquantifiée, l'on associe à chaque grandeur électromagnétique un opérateur $\mathcal{F}$. Un photon, qui se trouve dans l'état représenté par une fonction d'onde Ψ, peut s'annihiler au contact de la matière en cédant toute son énergie à la matière et en passant dans un état d'annihilation que l'on représente par une fonction d'annihilation constante et invariante $\Psi^{(0)}$. La grandeur électromagnétique F correspondant à l'opérateur $\mathcal{F}$ est égale par définition à

$$F = \Psi^{(0)*}_{\sigma\tau} \mathcal{F} \Psi_{\sigma\tau} = \Psi^{(0)*} \mathcal{F} \Psi, \tag{41}$$

la deuxième expression étant une forme symbolique simplifiée de la première. La grandeur F correspond à la transition quantique qui amène dans l'état d'annihilation le photon primitivement dans l'état Ψ, c'est-à-dire qu'elle correspond à l'*absorption* de ce photon par la matière. Réciproquement, la grandeur complexe conjuguée (¹)

$$F^* = \Psi^*_{\sigma\tau} \mathcal{F} \Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = \Psi^* \mathcal{F} \Psi^{(0)} \tag{42}$$

représente la grandeur électromagnétique associée à l'*émission* d'un photon dans l'état Ψ.

Nous admettrons que l'onde Ψ la plus générale doit être représentée par la superposition de l'onde $\Psi^{(0)}$ et des ondes planes monochromatiques à énergie positive du type

$$\Psi_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} e^{i(kt - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \tag{43}$$

avec $k = +\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2}$. Nous laissons donc de côté systématiquement les ondes planes à énergie négative conformément au point de vue développé dans le dernier paragraphe (²) et nous poserons

$$\Psi = c_0 \Psi^{(0)} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}. \tag{44}$$

(¹) Pour passer de (41) à (42), se souvenir que $\mathcal{F}$ est hermitien.

(²) L'hypothèse qui consiste à écarter les ondes à énergie négative pour ne conserver que celles à énergie positive présente une certaine analogie avec l'hypothèse que l'on fait dans la théorie classique du rayonnement quand on néglige les potentiels avancés pour ne garder que les potentiels retardés.

On considère que tous les photons liés à l'onde de vecteur **k** ont l'énergie positive k et les $n_{\mathbf{k}}$ des formules de la seconde quantification représentent les nombres de photons par onde plane. La valeur moyenne de la grandeur électromagnétique F est alors définie par la formule

$$(55) \qquad \overline{F} = \sum_{\mathbf{k}} R_1^*(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots) F R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots),$$

ce qui donne

$$(56) \qquad \overline{F} = \sum_{n_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}} R_1^*(\ldots n_{\mathbf{k}}, \ldots) \Big[\sqrt{n_{\mathbf{k}}+1}\, F_{\mathbf{k}} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}+1, \ldots) + \sqrt{n_{\mathbf{k}}}\, F_{\mathbf{k}}^* R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}-1, \ldots) \Big].$$

En comparant (56) avec (51), on voit que l'on peut identifier le $\overline{F}$ de la théorie quantique des champs avec le $\overline{\rho(\mathcal{F})}$ de la théorie du photon si l'on définit les grandeurs $F_{\mathbf{k}}$ et $F_{\mathbf{k}}^*$ par les formules (53), ce qui concorde bien avec nos conception antérieures.

Donc, bien qu'on ne le fasse pas toujours remarquer dans les exposés usuels de la théorie quantique des champs, dans cette théorie comme en Mécanique ondulatoire du photon superquantifiée, les termes à énergie positive correspondent aux processus d'absorption et les termes à énergie négative aux processus d'émission : sur ce point, il y a donc concordance entre les deux théories.

Là où elles divergent, c'est sur la façon d'écrire les développements de Fourier. La Mécanique ondulatoire du photon y introduit la fonction d'annihilation et en rejette les ondes à énergie négative; la théorie des champs ignore l'état d'annihilation et fait figurer côte à côte les ondes à énergie positive et celles à énergie négative, en cherchant à donner aux développements de Fourier, par la formule (54), l'aspect de grandeurs réelles. La méthode de la Mécanique ondulatoire du photon, nous paraît serrer de plus près la réalité physique : elle évite l'apparition de termes parasites dans les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement globale du champ et, sans chercher à donner *a priori* aux grandeurs électromagnétiques une apparence de grandeurs réelles, elle met mieux en évidence la liaison des termes à énergie positive avec les phénomènes d'absorption et celle des termes à énergie négative avec les phénomènes d'émission.

6. **Pourquoi les grandeurs électromagnétiques macroscopiques sont-elles des grandeurs réelles ?** — Considérons les développements équivalents (52) et (56). En quel sens peut-on dire qu'ils représentent

une grandeur réelle? Ceci n'est pas immédiatement évident car, ainsi que nous l'avons plus d'une fois noté, les opérateurs $c_{\mathbf{k}}$ et $c_{\mathbf{k}}^*$ ne sont pas complexes conjugués au sens usuel du mot. Mais ces opérateurs sont des opérateurs *adjoints* dans l'espace des n et par suite $c_{\mathbf{k}}+c_{\mathbf{k}}^*$ est hermitien dans cet espace. Pour cette raison, $\overline{F}$ valeur moyenne de (54) dans l'espace des n doit être réelle. Vérifions-le.

La quantité complexe conjuguée de

$$\sum_{n_{\mathbf{k}}} R_1^*(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)\sqrt{n_{\mathbf{k}}+1}\,F_{\mathbf{k}} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}+1, \ldots)$$

est

$$\sum_{n_{\mathbf{k}}}^{\infty} R_1^*(\ldots, n_{\mathbf{k}}+1, \ldots)\sqrt{n_{\mathbf{k}}+1}\,F_{\mathbf{k}}^* R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)$$

$$=\sum_{n_{\mathbf{k}}}^{\infty} R_1^*(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)\sqrt{n_{\mathbf{k}}}\,F_{\mathbf{k}}^* R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}-1, \ldots).$$

On obtient la seconde somme à partir de la première en remplaçant dans la sommation $n_{\mathbf{k}}$ par $n_{\mathbf{k}}-1$ et en remarquant que le terme relatif à $n_{\mathbf{k}}=0$ dans la seconde somme est nul. Il est alors évident que les deux termes relatifs à une même valeur de $\mathbf{k}$ dans (56) sont complexes conjugués et que l'on peut écrire

$$(57)\qquad \overline{F}=\sum_{n_{\mathbf{k}}}\left[F_{\mathbf{k}}\sum_{n_{\mathbf{k}}} R_1^*(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)\sqrt{n_{\mathbf{k}}+1}\,R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}+1, \ldots)+\text{conj.}\right].$$

Considérons maintenant un champ électromagnétique macroscopique où tous les $n_{\mathbf{k}}$ sont très grands, mais où les phases $\theta_{\mathbf{k}}$ sont bien définies. Nous définissons un tel champ par une sorte de « groupe d'ondes » dans l'espace des n que nous représenterons par

$$R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)=e^{i\sum_{\mathbf{k}}\theta_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}} R_2(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)$$

où R_2 n'est différent de zéro que pour des valeurs très grandes et relativement voisines de chaque $n_{\mathbf{k}}$ et varie très peu quand $n_{\mathbf{k}}$ varie d'une unité. En substituant dans (57), on obtient alors *après incorporation des phases* $\theta_{\mathbf{k}}$ *dans l'expression des* $F_{\mathbf{k}}$,

$$(58)\qquad \overline{F}=\sum_{n_{\mathbf{k}}}\sum_{\mathbf{k}}|R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}, \ldots)|^2\sqrt{n_{\mathbf{k}}}\,[F_{\mathbf{k}}+F_{\mathbf{k}}^*]$$

$$=\sum_{n_{\mathbf{k}}}\sum_{\mathbf{k}}|R_1|^2\sqrt{n_{\mathbf{k}}}\,F_{\mathbf{k}}^{(r)}=\sum_{\mathbf{k}}\sqrt{\overline{n_{\mathbf{k}}}}\,F_{\mathbf{k}}^{(r)},$$

où $F_{\mathbf{k}}^{(r)} = F_{\mathbf{k}} + F_{\mathbf{k}}^{*}$ est la grandeur électromagnétique réelle définie dans le cas d'un *seul* photon par la Mécanique ondulatoire du photon *non superquantifiée* (¹). Nous voyons qu'en multipliant ce champ réel par $\sqrt{n_{\mathbf{k}}}$, en faisant la somme pour tous les vecteurs **k** et enfin en prenant la moyenne dans l'espace des n, nous obtenons le champ macroscopique moyen F qui est une grandeur réelle au sens propre du mot.

7. Généralisation au cas des particules de spin 1 chargées électriquement. — Ce qui précède s'applique aux photons et plus généralement aux particules de spin 1 électriquement neutres. Nous allons maintenant montrer comment l'on peut tenter de généraliser les mêmes considérations au cas des particules chargées de spin 1.

Nous avons vu au paragraphe 2 qu'en ce cas la théorie quantique des champs écrit le développement d'une grandeur F sous la forme

$$F = \sum_{\mathbf{k}} [c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^{*} F_{\mathbf{k}}^{*}], \tag{59}$$

les termes $F_{\mathbf{k}}^{*}$ à énergie négative représentant les particules à charge négative, de telle sorte que $c_{\mathbf{k}}^{*} c_{\mathbf{k}}$ donne le nombre $n_{\mathbf{k}}^{+}$ des particules chargées positivement d'énergie positive k et de quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$, tandis que $d_{\mathbf{k}}^{*} d_{\mathbf{k}}$ donne le nombre $n_{\mathbf{k}}^{-}$ des particules à charge négative d'énergie positive k et de quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$. Dès lors, la grandeur $\bar{F}$ obtenue en faisant la moyenne dans l'espace des n est

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \sum_{n} R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \sum_{\mathbf{k}} [c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}}^{*} F_{\mathbf{k}}^{*}] R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \\
&= \sum_{n} \sum_{\mathbf{k}} R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \Big(\sqrt{n_{\mathbf{k}}^{+} + 1}\, F_{\mathbf{k}} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+} + 1, n_{\mathbf{k}}^{-}) \\
&\qquad + \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-}}\, F_{\mathbf{k}}^{*} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}} - 1, \ldots) \Big) \\
&= \sum_{n} \sum_{\mathbf{k}} \Big[R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+} - 1, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{+}}\, F_{\mathbf{k}} + R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-} + 1, \ldots) \\
&\qquad \times \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-} + 1}\, F_{\mathbf{k}}^{*} \Big] R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots).
\end{aligned} \tag{60}$$

(¹) Il faut toutefois bien noter que dans (58) les phases des $F_{\mathbf{k}}$ et $F_{\mathbf{k}}^{*}$ sont ici bien définies.

La formule (60) montre que le terme $F_{\mathbf{k}}$ correspond à l'*absorption* d'une particule *positive* et le terme $F^*_{\mathbf{k}}$ à l'*émission* d'une particule *négative*, fait qui n'est pas toujours bien mis en lumière dans les exposés usuels de la théorie quantique des champs.

Cherchons maintenant à nous placer à un point de vue analogue à celui que nous avons adopté plus haut en Mécanique ondulatoire du photon. Nous considérons les particules positives et les particules négatives comme des entités physiques distinctes représentées par des fonctions d'onde distinctes Ψ^+ et Ψ^-. Pour Ψ^+, nous admettrons un développement de la forme

$$(61)\qquad \Psi^+ = c_0\Psi^{(0)} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{k}} \qquad (c^*_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}),$$

et nous calculerons, comme en Mécanique ondulatoire du photon, la quantité $\rho(\mathcal{F})$ correspondant à l'opérateur $\mathcal{F}$ de l'espace ordinaire

$$(62)\qquad \begin{aligned}\overline{\rho(\mathcal{F})} &= \sum_n R^*_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}, n^-_{\mathbf{k}}, \ldots)\,\Psi^{+*}\mathcal{F}\Psi^+\,R_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}, \ldots)\\ &= \sum_n R^*_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}, n^-_{\mathbf{k}}, \ldots)\Big(c^*_0\Psi^{(0)} + \sum_{\mathbf{k}} c^*_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{k}^*}\Big)\\ &\quad\times\mathcal{F}\Big(c_0\Psi^{(0)} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi_{\mathbf{k}}\Big)R_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}, \ldots).\end{aligned}$$

D'où, en remarquant qu'en raison de l'énormité du nombre n_0 des particules annihilées, on peut négliger tous les termes ne contenant pas c_0 ou c^*_0 et que l'on peut absorber le facteur $\sqrt{n_0}$ dans la définition de l'opérateur $\mathcal{F}$

$$(63)\qquad \begin{aligned}\overline{\rho(\mathcal{F})} &= \sum_n\sum_{\mathbf{k}} R^*_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}, n^-_{\mathbf{k}}, \ldots)\\ &\quad\times\Big[\sqrt{n^+_{\mathbf{k}}+1}\,\Psi^{(0)}\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{k}}R_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}+1, n^-_{\mathbf{k}}, \ldots)\\ &\qquad + \sqrt{n^+_{\mathbf{k}}}\,\Psi^*_{\mathbf{k}}\mathcal{F}\Psi^{(0)}R_1(\ldots, n^+_{\mathbf{k}}-1, n^-_{\mathbf{k}}, \ldots)\Big],\end{aligned}$$

formule qui nous montre que $\Psi^{(0)}\mathcal{F}\Psi_{\mathbf{k}}$ multiplié par la racine carrée du nombre des particules positives dans l'état initial correspond à l'absorption de ces particules, tandis que $\Psi^*_{\mathbf{k}}\mathcal{F}\Psi^{(0)}$ multiplié par la racine carrée du nombre des particules positives dans l'état final correspond à l'émission d'une de ces particules.

Plus instructive est l'étude de la quantité $\overline{\rho(\mathcal{F})}$ relative aux particules négatives. Ici nous pouvons écrire pour le Ψ^- soit le développement

suggéré par la théorie quantique des champs

$$\Psi^{+} = c_0 \Psi^{+(0)} + \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^{*} \Psi_{\mathbf{k}}^{+*}, \tag{64}$$

soit plutôt le développement plus naturel au point de vue physique

$$\Psi^{-} = c_0 \Psi^{-(0)} + \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}, \tag{65}$$

les $\chi_{\mathbf{k}}$ représentant les ondes planes à énergie *positive* de la particule chargée *négativement*. Nous supposerons, dans un cas comme dans l'autre, que $d_{\mathbf{k}}^{*} d_{\mathbf{k}}$ donne le nombre $n_{\mathbf{k}}^{-}$ des particules à charge négative dans l'état **k**.

Avec le développement (64), on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\rho(\mathcal{F})} = & \sum_{n} R_1^{*}(\ldots\, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \left| c_0^{*} \Psi^{+(0)} + \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^{+} \right| \\ & \mathcal{F} \left| c_0 \Psi^{+(0)} + \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}^{*} \Psi_{\mathbf{k}}^{+*} \right| R_1(\ldots,\, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \\ = & \sum_{n} \sum_{\mathbf{k}} R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-} \ldots) \Big[\sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-}}\, \Psi^{+(0)} \mathcal{F} \Psi_{\mathbf{k}}^{+*} R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-} - 1, \ldots) \\ & + \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-} + 1}\, \Psi_{\mathbf{k}}^{+} \mathcal{F} \Psi^{+(0)} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-} + 1, \ldots) \Big]. \end{aligned} \tag{66}$$

Le premier terme du crochet correspond visiblement à l'émission d'une particule négative et le second à l'absorption d'une telle particule.

Avec le développement (65), nous obtenons

$$\begin{aligned} \overline{\rho(\mathcal{F})} = & \sum_{n} \sum_{\mathbf{k}} R_1^{*}(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-}, \ldots) \\ & \times \Big[\sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-} + 1}\, \Psi^{-(0)} \mathcal{F} \chi_{\mathbf{k}} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-} + 1, \ldots) \\ & + \sqrt{n_{\mathbf{k}}^{-}}\, \chi_{\mathbf{k}}^{*} \mathcal{F} \Psi^{-(0)} R_1(\ldots, n_{\mathbf{k}}^{+}, n_{\mathbf{k}}^{-} - 1, \ldots) \Big]. \end{aligned} \tag{67}$$

Ici le premier terme entre crochets se rapporte à une absorption et le second à une émission. La comparaison de (66) et de (67) conduit à assimiler d'une part $\Psi^{+(0)} \mathcal{F} \Psi_{\mathbf{k}}^{+*}$ et $\chi_{\mathbf{k}}^{*} \mathcal{F} \Psi^{-(0)}$ et d'autre part $\Psi^{-(0)} \mathcal{F} \chi_{\mathbf{k}}$ et $\Psi_{\mathbf{k}}^{+} \mathcal{F} \Psi^{+(0)}$. On peut traduire ce résultat en disant : l'émission (ou l'absorption) sur l'onde **k** d'une particule positive à énergie négative correspond à l'absorption (ou l'émission) sur cette onde **k** d'une particule négative à énergie positive.

Il semble que cette conclusion soit à rapprocher du fait qu'en théorie

de Dirac l'électron positif n'est pas assimilable à un électron négatif dans un état d'énergie négative, mais bien à un *manque* d'électron négatif dans un tel état.

L'ensemble des considérations des derniers paragraphes nous paraît faire pénétrer assez profondément la signification véritable qu'il faut attribuer au formalisme assez abstrait de la théorie quantique des champs. Ce formalisme est sans aucun doute très élégant et mathématiquement correct, mais il masque peut-être un peu le sens des phénomènes physiques qu'il représente; de plus, il conduit toujours pour les énergies globales à des expressions contenant un terme parasite. Il nous paraît plus conforme à la réalité physique de n'introduire dans les développements de Fourier que des termes à énergie positive, ce qui fait disparaître tout terme parasite dans l'expression de l'énergie. Peut-être, d'ailleurs, le problème du rapport des particules complémentaires de charges égales et opposées (électron et positon, méson positif et méson négatif, etc.) n'est-il pas encore entièrement bien posé et la construction d'un nouveau formalisme sera-t-il nécessaire pour traduire ce rapport plus exactement (1).

8. **Complications qu'entraîne dans la théorie quantique des champs l'hypothèse implicite $\mu_0 = 0$.** — Nous avons déjà vu que, contrairement à la Mécanique ondulatoire du photon, la théorie quantique des champs admet implicitement que la masse propre du photon est rigoureusement nulle, de façon à retrouver les équations de Maxwell sans les termes additionnels en μ_0^2. Mais, ce faisant, elle tombe dans de graves complications en ce qui concerne les relations de commutation de la seconde quantification. Nous avons vu, en effet, notamment que la relation $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ n'est pas compatible avec les relations de commutation de la théorie superquantifiée des particules de spin 1. Pour sortir de ces difficultés, la théorie quantique des champs est amenée à regarder le cas du photon comme tout à fait différent du cas général des particules de spin 1, alors que la Mécanique ondulatoire du photon, en admettant que la masse μ_0 est extraordinairement petite, mais non rigoureusement nulle, a l'avantage de pouvoir faire rentrer entièrement le cas du photon dans la théorie générale des particules de spin 1.

Voici quelles sont les hypothèses particulières qu'introduit la théorie quantique des champs dans le cas du photon. Dans la théorie générale

(1) *Voir* à ce sujet l'exposé de M. Dirac (*Proc. Roy. Soc.*, série A, vol. 180, mars 1942, p. 1-40).

des particules de spin 1 (et aussi, bien entendu, en Mécanique ondulatoire du photon), on considère toutes les équations Maxwelliennes comme vérifiées en chaque point de l'espace-temps aussi bien après qu'avant la seconde quantification, c'est-à-dire aussi bien quand on considère les grandeurs Maxwelliennes comme des opérateurs de l'espace des n que quand on les considère comme des grandeurs numériques. La théorie quantique des champs admet ce fait pour toutes les particules de spin 1 *autres que le photon* (par exemple pour les mésons); mais pour le photon, elle suppose que seules les équations

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{E} \tag{68}$$

sont vérifiées en tout point de l'espace-temps et, selon elle, il n'en serait pas de même des équations

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{69}$$

qui ne seraient pas vérifiées en tant que relations en x, y, z, t. Le premier membre des équations (69) définirait seulement des opérateurs de l'espace des n qui, *appliqués à la fonction de répartition* R des photons, donnerait zéro. En d'autres termes, on aurait non pas les égalités (69), mais les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\operatorname{div} \mathbf{E}) R_1(n, \ldots) = 0; \qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H}\right) R_1(n, \ldots) = 0; \\ \qquad\qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A}\right) R_1(n, \ldots) = 0. \end{array} \right. \tag{70}$$

Ce serait là des conditions imposées à la fonction R. Les auteurs disent souvent que, pour le photon, les relations (69) sont « des conditions sur le Ψ ». Il faut bien comprendre que le Ψ dont il est question est la fonction d'onde de l'espace n, c'est-à-dire la fonction de répartition R, et non pas le Ψ du photon dans l'espace ordinaire.

Cette manière de changer profondément le sens d'une partie seulement des équations Maxwelliennes, quand il s'agit du photon, nous paraît personnellement très artificielle. Elle introduit une différence, logiquement peu satisfaisante, entre le photon et les autres particules de spin 1 : les équations de toutes ces particules auraient en apparence la même forme, mais une partie d'entre elles s'interpréterait tout différemment suivant qu'il s'agirait d'un photon ou d'une particule de spin 1 de masse différente de zéro : voilà qui ne nous semble guère satisfaisant.

Quoi qu'il en soit, en définissant toujours la valeur moyenne des opérateurs F dans l'espace des n par la formule

$$\overline{F} = \sum_n R_1^*(n, \ldots) F(x, y, z, t) R_1(n, \ldots), \tag{71}$$

on obtiendra toujours les équations de Maxwell et les équations de Lorentz sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathbf{H}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{E}}, & \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{H}} = 0, & \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathbf{E}}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{H}}; & \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{E}} = 0, & \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{A}} = 0, \end{array} \right. \tag{72}$$

mais, répétons-le, en théorie quantique des champs, les deux premières équations (72) sont obtenues parce que l'on a en tout point $xyzt$ de l'espace-temps les relations (68), tandis que les trois dernières équations (72) résulteraient non pas des relations (69), mais des conditions sur R exprimées par (70).

Bien que la théorie quantique des champs retrouve les équations (72), il n'en est pas moins certain qu'en admettant implicitement pour les photons la relation $\mu_0 = 0$, elle est obligée, pour éviter des contradictions, de rompre l'unité de la théorie générale des particules de spin 1 et de recourir à l'hypothèse assez arbitraire qu'exprime la substitution de (70) à (69).

La position adoptée par la Mécanique ondulatoire du photon en posant $\mu_0 \neq 0$ nous paraît préférable [1].

9. **Remarque sur la relation** $[\mathbf{E}, \mathrm{N}] = \mathbf{E}$. — Rappelons [2] que si A et B sont deux opérateurs hermitiens d'un certain espace correspondant à des grandeurs observables a et b et si l'on a entre eux la relation de commutation $[A, B] = C$, les grandeurs a et b obéissent aux relations

---

[1] On peut encore remarquer que l'interprétation de la théorie quantique des champs est incompatible avec une théorie non superquantifiée où les grandeurs $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ et $\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ seraient nulles en tout point $xyzt$, car, si ces grandeurs étaient nulles, la seconde quantification les transformerait en opérateurs de l'espace des n nuls en tout point de l'espace-temps, contrairement à l'interprétation de la théorie quantique des champs : il y a là une difficulté à laquelle il semble qu'on ne puisse échapper qu'en supposant $\mu_0 \neq 0$.

[2] *Théorie générale des particules à spin*, p. 30 à 32 (Gauthier-Villars, 1943).

d'incertitude

$$(73)\qquad \Delta a\,\Delta b \geq \frac{1}{2}\,|\overline{C}|, \qquad \text{avec}\quad \Delta a = \sqrt{\overline{(A-\overline{A})^2}}; \qquad \Delta b = \sqrt{\overline{(B-\overline{B})^2}},$$

la moyenne de C étant prise dans l'espace où sont définis A et B.

Soit alors F une grandeur électromagnétique de la théorie du photon. On a

$$(74)\qquad F = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}},$$

les $F_{\mathbf{k}}$ étant des nombres complexes définis comme éléments de matrice liés à la transition de l'état $\mathbf{k}$ à l'état d'annhilation. F est un opérateur de l'espace des n, mais, comme les $c_{\mathbf{k}}$, il n'est pas hermitien et ne correspond pas à une grandeur directement observable.

Soit encore $N = \sum_{\mathbf{k}} c^*_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}$ le nombre total des photons non annihilés présents dans un champ électromagnétique. On trouve

$$(75)\qquad [F, N] = FN - NF = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} c^*_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} - \sum_{\mathbf{k}'} c^*_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}$$
$$= \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} [c_{\mathbf{k}} c^*_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} - c^*_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}}] F_{\mathbf{k}}.$$

Comme $[c^*_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}'}] = 0$ si $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ et que $[c^*_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}}] = -1$, il vient

$$(76)\qquad [F, N] = -\sum_{\mathbf{k}} [c^*_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}}] c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} = F,$$

d'où, par exemple, pour le champ électrique $\mathbf{E}$,

$$(77)\qquad [\mathbf{E}, N] = \mathbf{E}.$$

Ayant obtenu cette relation de commutation, la théorie quantique des champs (*voir* Heitler, *Quantum theory of radiation*, p. 67) veut en déduire la relation d'incertitude

$$(78)\qquad \Delta\mathbf{E}\,\Delta N \simeq \mathbf{E} \quad (^1).$$

Mais, du point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon, cette relation n'apparaît pas comme exacte, parce que $\mathbf{E}$ est un opérateur non

---

(1) La relation précise serait $\Delta\mathbf{E}\,\Delta N \geq \frac{1}{2}\,|\overline{\mathbf{E}}|$.

hermitien [1] ne correspondant pas à une grandeur ***observable*** de l'espace des n. On peut, il est vrai, définir pour les phénomènes à très grand nombre de photons un champ macroscopique observable $\sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}}(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}}^*)$, comme nous l'avons plus haut, mais ce champ macroscopique défini par une moyenne prise dans l'espace des n est un nombre ordinaire et l'on ne peut parler pour lui de relation de commutation.

Quant à l'opérateur $E_r = E + E^*$ (sans moyenne dans l'espace des n), on vérifie facilement qu'il est hermitien et que l'on a

$$[E_r, N] = E - E^*, \tag{79}$$

mais il ne paraît pas qu'il soit intéressant de considérer cette relation d'incertitude.

Bref, il nous semble que la relation (78) admise par la théorie quantique des champs usuelle ne doit pas être conservée : on échappe ainsi aux conclusions assez étranges qu'on déduisait de cette relation (*voir* Heitler, *loc. cit.*).

---

[1] D'ailleurs, si $\mathbf{E}$ était hermitien, la relation (76) serait contradictoire, car le commutateur de deux opérateurs hermitiens est antihermitien.

TROISIÈME PARTIE

INTERACTIONS ENTRE MATIÈRE ET RAYONNEMENT.

CHAPITRE X.

THÉORIE NON SUPERQUANTIFIÉE DES INTERACTIONS ENTRE MATIÈRE ET RAYONNEMENT.

1. **Préliminaires.** — En Mécanique ondulatoire, l'étude des interactions entre le rayonnement et la matière doit se ramener essentiellement à l'équation d'ondes du système photon + électron, puisque l'action du rayonnement s'exerce sur les particules électrisées de la matière dont l'électron est le type.

Rappelons donc d'abord quelques généralités sur les équations d'ondes de l'électron. Pour un électron libre (non soumis à un champ électromagnétique), l'équation d'ondes s'écrit :

$$(1)\quad \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t} = \frac{2\pi i}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3\right)\Psi_\sigma + m_0 c\alpha_4\Psi_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4).$$

Si nous introduisons les opérateurs

$$(2)\qquad W_{op} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}; \qquad (p_j)_{op} = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

nous pourrons écrire (1) sous la forme

$$(3)\qquad \frac{1}{c}W_{op}\Psi_\sigma + \mathbf{p}_{op}\vec{\alpha}\Psi_\sigma = m_0 c\alpha_4\Psi_\sigma,$$

$\vec{\alpha}$ étant une matrice-vecteur aux trois composantes $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$.

Mais on sait qu'en Mécanique relativiste, l'énergie d'un électron de charge $-e$ placé dans un champ électromagnétique dérivant des potentiels $\mathbf{A}$ et V est $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - eV$, somme de son énergie cinétique et

de son énergie potentielle; de même, sa quantité de mouvement est $\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, somme de la quantité de mouvement cinétique $\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et d'une sorte de quantité de mouvement *potentielle* $-\frac{e}{c}\mathbf{A}$.

Dès lors, il paraît tout naturel, quand on passe du mouvement de l'électron libre à celui de l'électron soumis à un champ électromagnétique dérivant des potentiels $\mathbf{A}$ et V, de transformer l'équation (3) en y remplaçant W_{op} par $W_{op} + eV$ et $\mathbf{p}_{op}$ par $\mathbf{p}_{op} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, ce qui conduit à l'équation de propagation

$$(4) \qquad \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + eV\right)\Psi_\sigma = \sum_{l=1}^{3}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_l} - \frac{e}{c}A_l\right)\alpha_l \Psi_\sigma + m_0 c \alpha_4 \Psi_\sigma.$$

Telle est, en effet, l'équation d'ondes que, guidé par l'analogie avec les expressions classiques, M. Dirac a adoptée pour le mouvement de l'électron dans le champ électromagnétique.

Pour distinguer les coordonnées de l'électron de celles du photon, nous désignerons les premières par XYZ et les secondes par xyz. Nous écrirons donc les équations de Dirac

$$(5) \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t} = H_0 \Psi_\sigma - e\left[V + (\vec{\alpha}\mathbf{A})\right]\Psi_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

où H_0 est l'Hamiltonien de Dirac en l'absence du champ

$$(6) \qquad H_0 = \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial X}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial Y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial Z}\alpha_3\right) + m_0 c \alpha_4.$$

Le terme $-e\left[V + (\vec{\alpha}\mathbf{A})\right]$ de (5) est le terme d'interaction entre électron et rayonnement qui nous intéresse particulièrement ici.

D'après la définition du vecteur densité-flux en théorie de Dirac, nous obtenons les relations

$$(7) \qquad e\rho = \sum_{\sigma=1}^{4}\Psi_\sigma^*(-e\,1)\Psi_\sigma; \qquad -e\rho\mathbf{v} = \sum_{\sigma=1}^{4}\Psi_\sigma^* e c \vec{\alpha}\Psi_\sigma,$$

où 1 désigne la matrice unité à 4 lignes et 4 colonnes et où $\vec{\alpha}$ est le vecteur-matrice de composantes α_1, α_2, α_3. On peut considérer les expressions (7) comme donnant les densités de valeur moyenne pour la charge et le courant électriques associés à l'électron dans l'état Ψ. On est donc ainsi conduit à faire correspondre à la charge de l'électron l'opérateur $-e\,1$ et au courant dû au mouvement de l'électron l'opé-

rateur $ec\vec{\alpha}$. Posons donc

$$e_{op} = -e\,1, \qquad \mathbf{i}_{op} = ec\vec{\alpha}. \tag{8}$$

Les termes d'interaction dans (5) pourront alors s'écrire

$$\left[e_{op}V\,1 + \left(\mathbf{i}_{op}\frac{\mathbf{A}}{c}\right)\right]. \tag{9}$$

Dans l'expression (9), les grandeurs se rapportant à l'électron se présentent sous la forme d'opérateurs, tandis que les grandeurs relatives au champ électromagnétique ont gardé le caractère de fonctions de point que l'on suppose connues par ailleurs. On fait ainsi jouer, comme d'ailleurs dans la théorie classique, un rôle très dissymétrique à l'électron et au photon. La Mécanique ondulatoire du photon va nous permettre de faire disparaître cette dissymétrie peu satisfaisante.

2. Formation de l'Hamiltonien pour le système photon-électron. — Nous rappellerons d'abord que nous avons mis les équations du photon dans le vide sous la forme

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = H_p\Psi_{\sigma\tau} \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

où H_p est l'Hamiltonien du photon défini par la formule

$$H_p = \frac{hc}{2\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_4}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_4}{2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_4}{2} + ik_0\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\right]. \tag{11}$$

Cherchons alors quel doit être, du point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon, l'Hamiltonien du système photon + électron.

Tout d'abord, considérons un photon et un électron en négligeant leur interaction. L'onde Ψ de l'électron satisfait à l'équation (3), celle du photon à l'équation (10). En posant

$$\Psi_{\rho\sigma\tau}(x, y, z, X, Y, Z, t) = \Psi_\rho(X, Y, Z, t)\Psi_{\sigma\tau}(x, y, z, t), \tag{12}$$

nous définissons une fonction d'ondes à 64 composantes pour le système électron + photon. Cette fonction d'onde satisfera évidemment à l'équation

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2}\right)\Psi_{\rho\sigma\tau} = \left[H_D\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2} + H_p\right]\Psi_{\rho\sigma\tau}, \tag{13}$$

qui représente un système de 64 équations.

La tâche essentielle que nous avons maintenant à remplir est d'introduire l'interaction entre l'électron et le photon en ajoutant un terme

supplémentaire dans l'équation (13). Pour cela, nous devons inspirer du terme (9) que nous avons rencontré en théorie de Dirac, mais, afin de traiter symétriquement photon et électron, nous allons remplacer les fonctions V et **A** par des opérateurs V_{op} et $\mathbf{A}_{op}$ qui agiront sur les indices se rapportant au photon, comme les opérateurs 1 et $\vec{\alpha}$ agissent sur les indices se rapportant à l'électron. Toutefois, cela ne suffira pas encore, car il nous faudra de plus exprimer que le champ électromagnétique en un point agit sur la charge électrique qui se trouve au *même* point de l'espace. Si nous admettons que cette circonstance est réalisée d'une façon tout à fait rigoureuse, il nous faudra faire intervenir dans le terme d'interaction un facteur de la forme

$$\delta(X-x)\,\delta(Y-y)\,\delta(Z-z)=\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}),$$

de sorte que le champ électromagnétique au point X, Y, Z agisse uniquement sur la charge électrique se trouvant au point $x=X$, $y=Y$, $z=Z$.

Finalement, nous écrirons donc le terme d'interaction sous la forme

$$H^{(1)}=-e\left[V_{op}\,1+\left(\vec{\alpha}\,\mathbf{A}_{op}\right)\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}). \tag{14}$$

Or nous avons été amenés précédemment à prendre pour opérateurs servant à définir les potentiels les opérateurs suivants [1] :

$$V_{op}=K'\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2};\qquad \mathbf{A}_{op}=-K'\frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4}{2}, \tag{15}$$

K′ étant la constante $\frac{K}{\sqrt{n_0}}$ qui, après la seconde quantification, se trouvera multipliée par $\sqrt{n_0}$ et donnera K. Nous obtiendrons donc pour (14)

$$H^{(1)}=-K'e\left[\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}\,1-\left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4}{2}\right)\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}). \tag{16}$$

et, par suite, pour l'équation d'ondes photon + électron

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\rho\sigma\tau} \tag{17}$$
$$=\left[H_0\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}+H_P-K'e\left(\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}-\left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4}{2}\right)\right)\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})\right]\Psi_{\rho\sigma\tau},$$

avec $\rho, \sigma = 1, 2, 3, 4$. Cette équation représente 64 relations entre les 64 $\Psi_{\rho\sigma\tau}$.

[1] *Voir* Chapitre III, formule (28).

3. Étude des éléments de la matrice $H^{(1)}$. — Dans l'équation d'ondes (17), nous voyons figurer le terme perturbateur défini par l'opérateur (16) à côté de l'Hamiltonien *non perturbé*

$$H_0 \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} + H_P.$$

Les fonctions propres de l'Hamiltonien non perturbé seront fournies par les produits $\Psi_{\sigma\tau}^{(l)} \Psi_{\rho}^{(m)}$ d'une onde plane du photon par une fonction propre de l'électron. Les ondes planes du photon sont données par les formules

$$(18) \qquad \Psi_{\tau\sigma}^{(l)} = a_{\sigma\tau}^{(l)} e^{i(k_l ct - \mathbf{k}_l \mathbf{r})}; \qquad k_l = \frac{2\pi}{c} \nu_l; \qquad k_l^2 = |k_l|^2 + k_0^2,$$

les $\alpha_{\sigma\tau}^{(l)}$ étant des constantes liées par des relations que nous avons précédemment étudiées.

Pour l'électron, les fonctions propres ne sont des ondes planes que si l'électron est libre : elles ont alors la forme

$$(19) \qquad \Psi_{\rho}^{(m)} = a_{\rho}^{(m)} e^{i(K_m ct - \mathbf{K}_m \mathbf{r})}; \qquad K_m = \frac{2\pi}{hc} W_m; \qquad K_m^2 = |\mathbf{K}_m|^2 + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2,$$

les $a_{\rho}^{(m)}$ étant des constantes liées par des relations que nous connaissons. Mais, si l'électron est placé dans un champ permanent, par exemple dans le champ du noyau d'un atome, les $\Psi^{(m)}$ représenteront des états stationnaires de l'électron dans ce champ et l'on aura

$$(20) \qquad \Psi_{\rho}^{(m)} = a_{\rho}^{(m)}(X, Y, Z)\, e^{iK_m ct},$$

les $a_{\rho}^{(m)}(X, Y, Z)$ étant les amplitudes complexes des fonctions propres, amplitudes qui sont en général variables d'un point à un autre. La forme (20) est générale et contient la forme (19) comme cas particulier.

Considérons la transition quantique du système électron + photon de l'état symbolisé par (l, m) à l'état symbolisé par (l', m'). L'élément de la matrice $H^{(1)}$ correspondant à cette transition a pour valeur

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{l'm',lm}^{(1)} &= \int_v \int_v \Psi^{(l')*}(\mathbf{r}) \Psi^{(m')*}(\mathbf{R}) H^{(1)} \Psi^{(l)}(\mathbf{r}) \Psi^{(m)}(\mathbf{R})\, d\mathbf{R}\, d\mathbf{r} \\ &= -K' e \int_v \int_v \Psi^{(l')*}(\mathbf{r}) \Psi^{(m')*}(\mathbf{R}) \left[\frac{\mathcal{B}_4 - \mathcal{A}_4}{2} - \left(\vec{\alpha}\, \frac{\vec{\mathcal{A}} \mathcal{B}_4 - \vec{\mathcal{B}} \mathcal{A}_4}{2} \right) \right] \\ &\quad \times \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})\, \Psi^{(l)}(\mathbf{r})\, \Psi^{(m)}(\mathbf{R})\, d\mathbf{R}\, d\mathbf{r} \\ &= -e \int_v \left[V_{l'l} \rho_{m'm} - \left(\mathbf{A}_{l'l} \frac{\mathbf{f}_{m'm}}{c} \right) \right] d\mathbf{r} \end{aligned} \right.$$

supplémentaire dans l'équation (13). Pour cela, nous devons inspirer du terme (9) que nous avons rencontré en théorie de Dirac, mais, afin de traiter symétriquement photon et électron, nous allons remplacer les fonctions V et **A** par des opérateurs V_{op} et $\mathbf{A}_{op}$ qui agiront sur les indices se rapportant au photon, comme les opérateurs 1 et $\vec{\alpha}$ agissent sur les indices se rapportant à l'électron. Toutefois, cela ne suffira pas encore, car il nous faudra de plus exprimer que le champ électromagnétique en un point agit sur la charge électrique qui se trouve au *même* point de l'espace. Si nous admettons que cette circonstance est réalisée d'une façon tout à fait rigoureuse, il nous faudra faire intervenir dans le terme d'interaction un facteur de la forme

$$\delta(X-x)\,\delta(Y-y)\,\delta(Z-z)=\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}),$$

de sorte que le champ électromagnétique au point X, Y, Z agisse uniquement sur la charge électrique se trouvant au point $x=X$, $y=Y$, $z=Z$.

Finalement, nous écrirons donc le terme d'interaction sous la forme

$$H^{(1)}=-e\left[V_{op}\,1+\left(\vec{\alpha}\,\mathbf{A}_{op}\right)\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}). \tag{14}$$

Or nous avons été amenés précédemment à prendre pour opérateurs servant à définir les potentiels les opérateurs suivants [1] :

$$V_{op}=K'\,\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}; \qquad \mathbf{A}_{op}=-K'\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\,\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\,\mathcal{A}_4}{2}, \tag{15}$$

K′ étant la constante $\frac{K}{\sqrt{n_0}}$ qui, après la seconde quantification, se trouvera multipliée par $\sqrt{n_0}$ et donnera K. Nous obtiendrons donc pour (14)

$$H^{(1)}=-K'e\left[\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}\,1-\left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\,\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\,\mathcal{A}_4}{2}\right)\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}). \tag{16}$$

et, par suite, pour l'équation d'ondes photon + électron

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\rho\sigma\tau} \tag{17}$$
$$=\left[H_D\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}+H_p-K'e\left(\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}-\left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\,\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\,\mathcal{A}_4}{2}\right)\right)\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})\right]\Psi_{\rho\sigma\tau},$$

avec ρ, σ = 1, 2, 3, 4. Cette équation représente 64 relations entre les 64 $\Psi_{\rho\sigma\tau}$.

---

[1] *Voir* Chapitre III, formule (28).

étudier l'évolution de ce système, la méthode de variation des constantes de Dirac. Mais dans l'application de cette méthode, on se heurte à un certain nombre de difficultés comme nous l'avons déjà signalé au Tome II de notre *Nouvelle théorie de la Lumière*. En particulier, l'hypothèse que les ondes sont normées est essentielle pour la validité de la méthode de variation des constantes : or, ici, la normalisation de l'onde $\Psi^{(0)}$ soulève des difficultés, car elle conduirait à écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dz = 1.$$

Voici une autre difficulté qui nous a été signalée récemment par M. Jacques Courtois. Les 64 équations symbolisées par l'équation (17) se divisent en deux constantes en multipliant successivement par $\left(\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right)^2$ et par $\left(\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)^2$. On obtient une équation d'évolution et une équation de condition de la forme (¹)

$$\left\{\begin{aligned}
&(E)\quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\rho\sigma\tau}\\
&\quad=\Bigg[H_D\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}+\left(\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right)^2 H_P\\
&\qquad-K'e\left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4}{2}\right)\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})\left(\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)^2\Bigg]\Psi_{\rho\sigma\tau},\\
&(C)\quad\Bigg[\left(\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)^2 H_P\\
&\qquad+K'e\left(\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}\,1+\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4}{2}\left(\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right)^2\right)\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})\Bigg]\Psi_{\rho\sigma\tau}=0
\end{aligned}\right.$$

Les équations (C) sont des équations de condition où n'interviennent pas les dérivées des $\Psi_{\rho\sigma\tau}$ par rapport au temps : l'existence de ces conditions fait que les $\Psi_{\rho\sigma\tau}$ ne peuvent pas, en général, être considérées comme des combinaisons linéaires des solutions de l'équation non perturbée (13), ce qui rend illégitime l'application de la méthode de variation des constantes.

Néanmoins, il convient d'observer que, comme le montrent des calculs simples, les termes $K'e\left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4-\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4}{2}\right)\left(\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)^2\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})$

(¹) Le fait que $\left(\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)^2=1$ prouve que les équations (E) et (C) sont équivalentes à l'équation (17).

figurant dans les équations (E) dépendent uniquement des ondes transversales, tandis que les termes

$$-\mathbf{K}'e\left[\frac{\mathcal{A}_i - \mathcal{B}_i}{2}\,\mathrm{I} - \left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_i - \vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_i}{2}\right)\left(\frac{\mathcal{A}_i + \mathcal{B}_i}{2}\right)^2\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})$$

figurant dans les équations (C) dépendent uniquement des ondes longitudinales. Il en résulte que la difficulté signalée n'existe que si l'on fait intervenir les ondes longitudinales et disparaît si l'on se borne à considérer les ondes transversales.

Cependant, même si l'on se borne à considérer les ondes transversales, l'emploi des équations non superquantifiées est toujours, en principe, illégitime. Il y a, en effet, toujours un nombre immense de photons dans l'état annihilé susceptibles de donner lieu à des phénomènes d'émission puisqu'on n'a jamais constaté une *saturation* de ces phénomènes : il n'est donc jamais légitime de considérer que l'on a affaire à un seul photon.

Autrement dit, dans tout problème relatif à l'interaction entre la matière et le rayonnement, il est toujours nécessaire d'introduire pour les photons la seconde quantification, et cette conclusion va nous conduire à écrire sous une autre forme l'équation du système électron + rayonnement.

CHAPITRE XI.

THÉORIE SUPERQUANTIFIÉE DES INTERACTIONS ENTRE MATIÈRE ET RAYONNEMENT.

1. Évolution de la fonction R de répartition en théorie superquantifiée. — Nous avons vu que l'évolution de la fonction de répartition R est donnée par une équation de la forme

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathrm{R}(n_1, \ldots, n_n, \ldots, n_m, \ldots, t) \\ &\quad = \frac{2\pi i}{h}\sum_{nm}\mathrm{H}^{(1)}_{nm}\sqrt{n_n(n_m+1-\delta_{mn})} \\ &\qquad \times \mathrm{R}(n_1, \ldots, n_n-1, \ldots, n_m+1, \ldots, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathrm{E}_m-\mathrm{E}_n)t}, \end{aligned}$$

où $\mathrm{H}^{(1)}$ est le potentiel perturbateur et $\mathrm{H}^{(1)}_{nm}$ l'élément d'indices nm de la matrice (de Schrödinger) engendrée par l'opérateur $\mathrm{H}^{(1)}$ dans le système des fonctions propres de l'hamiltonien non perturbé.

Pour étudier l'évolution de R dans le cas le plus usuel, supposons que l'on connaisse la répartition des particules entre leurs états possibles d'énergie à un instant initial $t = 0$: cette répartition est représentée par un certain jeu de nombres entiers $n_1, \ldots, n_n, \ldots, n_m, \ldots$. Donc à l'instant $t = 0$, la fonction R est nulle partout dans l'espace des n sauf au point qui est spécifié par le jeu de nombres entiers en question et en ce point on a $\mathrm{R} = 1$. La probabilité pour qu'une transition $n \to m$ se soit produite à l'instant t est donnée, d'après la signification même de la fonction R, par la quantité

$$|\mathrm{R}(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_m + 1, \ldots, t)|^2.$$

Pour suivre l'évolution de cette probabilité pendant un certain temps, nous pouvons utiliser l'équation approximative

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathrm{R}(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_m + 1, \ldots, t) \\ &\quad \simeq \frac{h}{2\pi i}\mathrm{H}^{(1)}_{mn}\sqrt{n_n(n_m+1)}\, e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathrm{E}_n-\mathrm{E}_m)t} \end{aligned}$$

car, si $H^{(1)}$ est une perturbation faible, ce que nous supposerons, $R(n_1, \ldots, n_n, \ldots, n_m, \ldots, t)$ reste assez longtemps sensiblement égal à 1, les autres valeurs de R restant sensiblement nulles.

La relation de l'équation (2) telle que la valeur initiale

$$R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_m + 1, \ldots, 0)$$

soit nulle est

$$(3) \quad R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_m + 1, \ldots, t) = H^{(1)}_{mn} \sqrt{n_n(n_m + 1)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m)t} - 1}{E_n - E_m}.$$

Pendant l'intervalle de temps où cette solution est valable, l'expression de la probabilité pour qu'une particule ait subi sous l'action de la perturbation pendant l'intervalle de temps t la transition $n \to m$ est

$$(4) \quad \begin{aligned} &|R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_m + 1, \ldots, t)|^2 \\ &= \frac{2|H^{(1)}_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2}\left[1 - \cos\frac{2\pi}{h}(E_n - E_m)t\right] n_n(n_m + 1). \end{aligned}$$

Cette probabilité est proportionnelle au carré de l'élément de matrice $H^{(1)}_{mn}$ et c'est ce qui donne à cette quantité une importance particulière.

Il peut arriver que certains $H^{(1)}_{mn}$ soient nuls. Cela signifie que la transition $n \to m$ ne peut s'effectuer directement : il n'en faut toutefois pas conclure que le passage de l'état n à l'état m soit impossible, il peut s'effectuer avec étapes intermédiaires, par exemple avec une étape intermédiaire dans un état p si $H^{(1)}_{pn}$ et $H^{(1)}_{mp}$ sont différents de zéro. Plus généralement, nous supposerons qu'il y ait plusieurs états p possibles suivant le schéma

$$n \begin{array}{c} \nearrow p \searrow \\ \nearrow p' \searrow \\ \searrow p'' \nearrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} m.$$

Dans ce cas, l'équation (2) doit être remplacée par les équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p + 1, \ldots, n_m, \ldots, t) \\ &\quad \sim \frac{2\pi i}{h} H^{(1)}_{pn} e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_p)t} \sqrt{n_n(n_p + 1)}, \\ &\frac{\partial}{\partial t} R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p, \ldots, n_m + 1, \ldots, t) \\ &\quad = \frac{2\pi i}{h} \sum_p H^{(1)}_{mp} \sqrt{(n_m + 1)(n_p + 1)} \\ &\qquad \times R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p + 1, \ldots, n_m, \ldots, t) e^{\frac{2\pi i}{h}(E_p - E_m)t}. \end{aligned} \right.$$

L'intégration de la première équation (5), avec la condition initiale $R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p + 1, \ldots, n_m, \ldots, 0) = 0$, donne

$$(6) \quad R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p + 1, \ldots, n_m, \ldots, t) = H^{(1)}_{pn} \sqrt{n_n(n_p+1)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_p)t} - 1}{E_n - E_p},$$

et la seconde équation devient

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p, \ldots, n_m + 1, \ldots, t) = \frac{2\pi i}{h} \sum_p H'^{(1)}_{mp} H^{(1)}_{pn} \sqrt{n_n(n_m+1)(n_p+1)} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m)t} - e^{\frac{2\pi i}{h}(E_p - E_m)t}}{E_n - E_p}.$$

D'où, en intégrant avec la condition initiale

$$(8) \quad R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p, \ldots, n_m + 1, \ldots, 0) = 0,$$

il vient

$$(9) \quad R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p, \ldots, n_m + 1, \ldots, t) = \sum_p \frac{H^{(1)}_{mp} H^{(1)}_{pn}}{E_n - E_p} \sqrt{n_n(n_m+1)(n_p+1)} \times \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_n - E_m)t} - 1}{E_n - E_m} - \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(E_p - E_m)t} - 1}{E_p - E_m} \right].$$

Posons

$$(10) \quad H'_{mn} = \sum_p \frac{H^{(1)}_{mp} H'^{(1)}_{pn}}{E_n - E_p},$$

nous trouvons pour la probabilité de passage de l'état n à l'état m dans l'intervalle de temps $0 \to t$ par l'intermédiaire de l'un quelconque des états p une expression de la forme

$$(11) \quad |R(n_1, \ldots, n_n - 1, \ldots, n_p, \ldots, n_m + 1, \ldots, t)|^2 = \frac{2|H'_{mn}|^2}{(E_m - E_n)^2} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{h}(E_n - E_m)t \right] n_n(n_m+1)(n_p+1)^2 + \ldots,$$

les termes non écrits n'intervenant pas effectivement dans les calculs usuels.

On pourrait développer des calculs analogues pour les cas où le passage $n \to m$ s'effectuerait avec plusieurs étapes intermédiaires successives.

2. Probabilités de transition par unité de temps. — La notion de probabilité de transition par unité de temps intervient quand on a affaire à des spectres continus.

Supposons que l'état final m appartienne à un intervalle extrêmement petit ΔE d'un spectre continu et plaçons-nous d'abord dans le cas où la transition $n \to m$ est directement possible. Alors la probabilité totale du passage de l'état n à l'un quelconque des états m de l'intervalle d'énergie $E \to E + \Delta E$ sera

$$(12) \quad P_{\Delta E,n}(t) = 2\int_{\Delta E} \frac{|H^1_{mn}|^2}{(E - E_n)^2} n_n(n_m + 1)\left[1 - \cos\frac{2\pi}{h}(E - E_m)t\right]\rho(E)\,dE$$

$$= \frac{4\pi^2}{h^2}\int_{\Delta E} |H^1_{mn}|^2 n_n(n_m + 1)\left(\frac{\sin\frac{\pi}{h}(E - E_n)t}{\frac{\pi}{h}(E - E_n)}\right)^2 \rho(E)\,dE.$$

Par définition, la probabilité de transition par unité de temps sera

$$(13) \quad P_{\Delta E,n} = \lim_{t \to \infty} \frac{P_{\Delta E,n}(t)}{t}$$

si cette limite existe.

Or, on voit facilement que si E_n n'appartient pas à l'intervalle ΔE, la quantité $P_{\Delta E,n}(t)$ prend pour $t \to \infty$ une valeur constante proportionnelle à ΔE, tandis que si E_n appartient à ΔE, les éléments de l'intégrale (12) correspondant aux valeurs de E voisines de E_n sont prépondérantes et la limite de $P_{\Delta E,n}(t)$ croît comme t pour t très grand. Dans le premier cas, la probabilité de transition par unité de temps est donc nulle, dans le second elle a une valeur finie.

Plus précisément, si E_n appartient à ΔE, les éléments d'intégration extérieurs à l'intervalle $\delta E = E - E_n$ apportent à l'intégrale une contribution négligeable dès que le temps t est très supérieur à la valeur

$$\delta t = \frac{h}{2\pi\,\delta E}.$$

Ainsi, il n'y a probabilité de passage par unité de temps sensiblement différente de zéro que vers les états m du spectre continu dont l'énergie est presque égale à l'énergie E_n de l'état initial, ce qui permet d'écrire $P_{E_n,n}$ à la place de $P_{\Delta E,n}$.

Ce résultat exprime la conservation de l'énergie en Mécanique ondulatoire et l'on voit qu'après avoir attendu un temps δt à partir du début de la perturbation, on ne peut prévoir l'énergie de l'état final qu'avec une incertitude qui est au moins égale à $\frac{h}{2\pi\,\delta t}$. C'est là un aspect de ce que

l'on nomme souvent la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg. Pratiquement, la conservation de l'énergie est réalisée presque instantanément et l'on peut dire que la probabilité de transition par unité de temps n'a une valeur différente de zéro que si l'état final m a même énergie E_n que l'état initial. L'expression de cette probabilité est la suivante

$$(14)\quad P_{E_n,n} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \frac{4\pi^2}{h^2} |H_{mn}^{(1)}|^2 n_n(n_m+1)\rho(E_n) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{h}(E-E_n)t}{\frac{\pi}{h}(E-E_n)} \right)^2 dE,$$

car l'élément d'intégration contenant la valeur $E = E_n$ est entièrement prépondérant dans l'intégrale (12), et l'on peut, sans erreur sensible, remplacer $\rho(E)$ par $\rho(E_n)$, puis étendre l'intégration à toutes les valeurs de E.

En posant $u = \frac{\pi}{h}(E - E_n)t$, il vient

$$(15)\quad \begin{aligned} P_{E_n,n} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \frac{4\pi^2}{h^2} |H_{mn}^{(1)}|^2 n_n(n_m+1)\rho(E_n) \frac{ht}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du \\ &= \frac{4\pi^2}{h} |H_{mn}^{(1)}|^2 n_n(n_m+1)\rho(E_n). \end{aligned}$$

Telle est la formule fondamentale donnant, dans la théorie superquantifiée, la probabilité de transition par unité de temps quand l'état final appartient à un spectre continu et que la transition de l'état initial à l'état final est possible directement.

Si c'est l'état initial n qui appartient à un spectre continu, la transition $n \to m$ étant toujours directement possible, on trouve

$$(16)\quad P_{m,E_m} = \frac{4\pi^2}{h} |H_{mn}^{(1)}|^2 n_n(n_m+1)\rho(E_m).$$

Si le passage $n \to m$ n'est pas directement possible, mais peut s'effectuer avec étape dans un état intermédiaire p, il faut reprendre le calcul en partant de la formule (11). Mis à part certains cas exceptionnels où il y aurait résonance entre les états m et p, les termes non écrits de la formule (11) ne donnent aucune contribution appréciable et l'on peut les négliger. On obtiendra donc les formules applicables ici en remplaçant dans (15) et (16) les quantités $H_{mn}^{(1)}$ et $\sqrt{n_n(n_m+1)}$ respectivement par H'_{mn} et $\sqrt{n_n(n_m+1)}(n_p+1)$, ce qui donne

$$(17)\quad P_{E_n,n} = \frac{4\pi^2}{h} |H'_{mn}|^2 n_n(n_m+1)(n_p+1)^2 \rho(E_n).$$

Il est très important de remarquer qu'il y a encore conservation de l'énergie dans le processus global de passage de l'état n à m, mais qu'il n'y a pas nécessairement conservation de l'énergie dans les processus partiels $n \to p$ et $p \to m$.

On pourrait naturellement généraliser la théorie pour les cas où le passage $n \to m$ s'effectuerait avec plusieurs étapes intermédiaires successives. On aboutirait ainsi à une classification des phénomènes de transition qui a une grande importance dans l'étude des phénomènes d'interaction entre matière et rayonnement. Les processus de transition directe $n \to m$ sont dits *du premier ordre :* leurs probabilités sont des fonctions du second degré des éléments de la matrice $H^{(1)}$. Les processus de transition du type $n \to p \to m$ avec une étape intermédiaire sont dits *du deuxième ordre :* leurs probabilités s'expriment par des fonctions du quatrième degré des éléments de la matrice $H^{(1)}$. Plus généralement, les processus de transition faisant intervenir $k-1$ étapes intermédiaires sont dits du $k^{\text{ième}}$ ordre et leurs probabilités s'expriment par des fonctions de degré $2k$ des éléments de la matrice $H^{(1)}$.

3. **Équation d'évolution de la fonction R pour le système électron-rayonnement.** — Nous savons que pour le système électron + photon le terme perturbateur de l'Hamiltonien peut s'écrire [1]

$$(18) \qquad H^{(1)} = -K'e\left[\frac{\mathcal{B}_4 - \mathcal{A}_4}{2}\,1 - \left(\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4 - \vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4}{2}\right)\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})$$

avec

$$(19) \qquad K' = \frac{1}{\sqrt{n_0}}\,k = \frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0 n_0}}.$$

Nous savons aussi, d'après le dernier paragraphe du précédent Chapitre, que ce terme perturbateur peut se décomposer en deux parties, l'une relative aux ondes transversales, l'autre aux ondes longitudinales, suivant le schéma [2],

$$(20) \quad \begin{cases} H^{(1)} = H^{(1)}_{tr} + H^{(1)}_{long}, \\ H^{(1)}_{tr} = -K'e\left(\alpha\dfrac{\mathbf{B}\mathcal{A}_4 + \mathbf{A}\mathcal{B}_4}{2}\right)\left(\dfrac{\mathcal{A}_4 - \mathcal{B}_4}{2}\right)^2 \delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}), \\ H^{(1)}_{long} = -K'e\left[\dfrac{\mathcal{B}_4 - \mathcal{A}_4}{2}\,1 - \left(\alpha\dfrac{\mathbf{B}\mathcal{A}_4 - \mathbf{A}\mathcal{B}_4}{2}\right)\left(\dfrac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\right)^2\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r}). \end{cases}$$

---

(1) Formule (16) du chapitre X.

(2) La difficulté signalée p. 155 pour la méthode de variation des constantes sans seconde quantification n'existe plus ici si l'on pose *a priori* comme postulat la validité de l'équation (1).

Pour introduire dans ce problème la seconde quantification, il serait logique de l'appliquer à la fois aux électrons et aux photons. Néanmoins pour n'avoir pas à introduire le formalisme assez compliqué de la seconde quantification pour les électrons, on peut se contenter, comme on le fait usuellement en théorie quantique des champs, d'introduire la seconde quantification pour les photons.

Si $R(n_0, \ldots, n_1, \ldots, t)$ est la fonction de répartition des photons, on se contentera d'écrire comme équation d'évolution pour R

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial t} R(n_0, \ldots, n_l, \ldots, n_{l'}, \ldots, t) = \frac{2\pi i}{h} \sum_{l'm', lm} H^{(1)}_{l'm', lm} \sqrt{n_l(n_{l'} + 1 - \delta_{ll'})} \times R(n_0, \ldots, n_l - 1, \ldots, n_{l'} + 1, \ldots, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}[E_l + E_m - E_{l'} - E_{m'}]t},$$

les éléments de matrice étant définis, à la manière de Schrödinger, par les fonctions propres débarrassées des facteurs exponentiels dépendant du temps.

Mais nous savons qu'en raison de la valeur pratiquement infinie de n_0, nous pouvons ne garder au second membre de l'équation d'évolution que les termes où l'un des indices est égal à zéro. Nous poserons donc

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial t} R(n_0, \ldots, n_l, \ldots, t) = \frac{2\pi i}{h}\Bigg[\sum_{m'm} H^{(1)}_{0m', lm} \sqrt{n_0(n_l + 1)}\, R(n_0 - 1, \ldots, n_l + 1, \ldots, t) \times e^{\frac{2\pi i}{h}[E_l + E_m - E_{m'}]t} + \sum_{m'm} H^{(1)}_{lm', 0m} \sqrt{n_l(n_0 + 1)}\, R(n_0 + 1, \ldots, n_l - 1, \ldots, t) \times e^{-\frac{2\pi i}{h}[E_l + E_m - E_{m'}]t}\Bigg]$$

et nous avons vu que l'on a (car $n_0 + 1 \simeq n_0$)

$$(23) \quad \begin{cases} H^{(1)}_{0m', lm}\sqrt{n_0} = -e\displaystyle\int_v \left[V_l\, \rho_{mm'} - \left(\mathbf{A}_l\, \frac{\mathbf{f}_{mm'}}{c}\right)\right] d\mathbf{r}, \\ H^{(1)}_{lm', 0m}\sqrt{n_0} = -e\displaystyle\int_v \left[V^*_l\, \rho_{mm'} - \left(\mathbf{A}^*_l\, \frac{\mathbf{f}_{mm'}}{c}\right)\right] d\mathbf{r} \simeq H^{(1)}_{lm', 0m}\sqrt{n_0 + 1}, \end{cases}$$

V_l et $\mathbf{A}_l$ étant les potentiels attachés à l'onde l (définis à l'aide de la constante $K = K'\sqrt{n_0}$) et V^*_l et $\mathbf{A}^*_l$ étant les quantités complexes conju-

guées. On pourra d'ailleurs décomposer ces expressions en termes se rapportant aux ondes transversales et ne contenant que les composantes transversales du potentiel-vecteur et en termes se rapportant aux ondes longitudinales et contenant seulement le potentiel scalaire et la composante longitudinale du potentiel-vecteur (1).

Par la méthode esquissée au paragraphe précédent, l'équation d'évolution de R permet d'étudier les transitions provoquées par les interactions entre matière et rayonnement. D'après ce qui vient d'être dit, cette étude peut se décomposer en l'étude des effets des ondes transversales et en celle des effets des ondes longitudinales. Dans ces études, on aura d'ailleurs à distinguer les processus du premier ordre s'opérant directement sans étape intermédiaire, les processus du second ordre s'opérant avec étape dans un état virtuel intermédiaire..., les processus du $n^{\text{ième}}$ ordre s'opérant avec étapes dans $n-1$ états virtuels intermédiaires, etc.

Dans tous les cas, au bout d'un temps extrêmement court la conservation de l'énergie sera réalisée dans le processus global de passage de l'état initial à l'état final, sans d'ailleurs que cette conservation ait lieu nécessairement dans les états intermédiaires. Finalement, l'énergie perdue (ou gagnée) par le photon est toujours gagnée (ou perdue) par l'électron.

4. Interactions matière-rayonnement dues aux ondes transversales. — Nous avons fait une étude assez détaillée de l'action des ondes transversales au tome II de notre *Nouvelle théorie de la Lumière*. Elle montre que les phénomènes d'émission et d'absorption de la lumière par la matière ainsi que l'effet photoélectrique sont des processus du premier ordre s'opérant directement sans passage par un état virtuel intermédiaire, tandis que les phénomènes de diffusion (diffusion cohérente de Rayleigh, effets Raman et Compton) sont des processus du second ordre impliquant l'intervention d'un état virtuel intermédiaire. Des processus d'ordres supérieurs au second se présentent aussi dans cette théorie : ainsi l'émission par onde d'accélération (fond continu

---

(1) On remarquera ici, *ce qui est très important*, que les potentiels V_l et $\mathbf{A}_l$ qui interviennent dans l'équation d'évolution (22) sont précisément les potentiels définis par la Mécanique ondulatoire du photon sans seconde quantification. Ce sont donc les grandeurs électromagnétiques complexes des types F et F* (et non leur valeur moyenne dans l'espace des n) qui règlent les probabilités des transitions quantiques : ceci montre que ce sont les grandeurs complexes qui sont les véritables grandeurs électromagnétiques de l'échelle microscopique.

des rayons X par exemple) est un processus du troisième ordre impliquant l'intervention de deux états virtuels intermédiaires.

Les expressions que fournissent les calculs pour l'intensité de ces divers phénomènes se raccordent avec celles que faisait prévoir l'application du principe de correspondance en partant des formules fournies par la théorie électromagnétique classique du rayonnement : elles sont en bon accord avec l'expérience.

Sans insister sur le détail des calculs, nous nous bornerons à rappeler un point important. Les formules du paragraphe précédent montrent que la probabilité d'absorption d'un photon, primitivement dans l'état d'énergie E_l, est proportionnelle à la valeur initiale de n_l, tandis que la probabilité d'émission d'un photon d'énergie E_l est proportionnelle à la valeur initiale de $n_l + 1$. Ce fait se rattache directement au célèbre raisonnement qui a permis en 1916 à Einstein de relier la loi du rayonnement noir de Planck à la loi des fréquences de Bohr.

Einstein envisage un très grand nombre d'atomes de même espèce se trouvant en équilibre thermodynamique avec le rayonnement noir ambiant dans une enceinte maintenue à la température uniforme T. Soient E_n et $E_m > E_n$ deux niveaux d'énergie quantifiée de ces atomes. Désignons par N_n et N_m les nombres d'atomes dans chacun de ces états quantifiés. Si nous admettons la loi des fréquences de Bohr, les atomes qui se trouvent dans l'état d'énergie E_m peuvent passer dans l'état d'énergie E_n en cédant au rayonnement un quantum $h\nu_l = E_m - E_n$ d'énergie radiante de fréquence ν_l et inversement les atomes qui se trouvent dans l'état E_n peuvent passer dans l'état d'énergie supérieure E_m en empruntant au rayonnement un quantum $h\nu_l$ d'énergie radiante de fréquence ν_l. Le second processus se produira *en moyenne* par unité de temps un nombre de fois qui sera proportionnel : 1° à N_n ; 2° au nombre moyen $\overline{n_l}$ de photons dans l'état d'énergie $h\nu_l$. De même, le premier processus se produira en moyenne par unité de temps en nombre de fois qui sera proportionnel : 1° à N_m ; 2° au nombre moyen $\overline{n_l}$ des photons d'énergie $h\nu_l$ *augmenté d'une unité*. Pour que l'état d'équilibre ne soit pas troublé par ces échanges d'énergie entre matière et rayonnement. ce qui est thermodynamiquement nécessaire, il faudra donc avoir

$$(24) \qquad N_m(\overline{n_l} + 1) = N_n \overline{n_l}.$$

D'après la loi de répartition bien connue de Maxwell-Boltzmann, dans un état d'équilibre thermodynamique caractérisé par la valeur T de la

température absolue, on doit avoir

$$(25)\qquad \frac{N_n}{N_m} = \frac{e^{-\frac{E_n}{kT}}}{e^{-\frac{E_m}{kT}}} = e^{\frac{E_m - E_n}{kT}} = e^{\frac{h\nu_l}{kT}},$$

la dernière expression provenant de la loi des fréquences de Bohr. Il en résulte que

$$(26)\qquad \bar{n}_l + 1 = \bar{n}_l e^{\frac{h\nu_l}{kT}},$$

ou

$$(27)\qquad \bar{n}_l = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_l}{kT}} - 1}.$$

Tel est le nombre moyen des photons d'énergie $h\nu_l$ dans le rayonnement noir à la température absolue T.

Si l'on considère un très petit intervalle spectral $\delta\nu$, le nombre des états distincts dont des photons enfermés dans une enceinte vide de volume v sont susceptibles et dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle spectral très petit $\delta\nu$, est d'après une formule établie par Sir J. H. Jeans

$$(28)\qquad \delta\mathcal{N} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\delta\nu\, v.$$

Chacun des états possibles étant occupé en moyenne par le nombre (27) de photons dans l'état d'équilibre thermodynamique à la température T, il y aura

$$(29)\qquad \delta\mathcal{N}.\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu\, v$$

photons ayant des fréquences comprises dans l'intervalle spectral $\nu - \nu + \delta\nu$. Comme $\delta\nu$ est très petit, chaque photon de cet intervalle a sensiblement l'énergie $h\nu$ et l'on obtiendra la densité spectrale de l'énergie dans le rayonnement noir en multipliant par $h\nu$ le nombre des photons de l'intervalle $\delta\nu$, puis en divisant par v, ce qui donne

$$(30)\qquad \rho(\nu)\,\delta\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\,\delta\nu,$$

c'est-à-dire la formule bien connue de Planck.

Le raisonnement précédent a ici pour nous le grand intérêt de nous montrer comment la formule de Planck dérive de l'introduction des facteurs n_l et n_l+1 par la théorie de la seconde quantification appliquée aux photons considérés comme des particules à fonctions d'onde symétriques.

5. **Interactions dues aux ondes longitudinales.** — Les termes correspondant aux ondes longitudinales dans l'équation d'évolution de R sont susceptibles d'une interprétation particulière qui est bien connue en théorie quantique des champs : ils correspondent aux actions électromagnétiques entre particules chargées et notamment aux actions Coulombiennes. Mais dans la théorie quantique des champs sous sa forme usuelle, cette interprétation a quelque chose d'un peu paradoxal. En effet, la théorie des champs admet que l'on a rigoureusement $\mu_0 = 0$ et elle postule l'invariance de jauge qui enlève toute réalité physique aux potentiels. Or si $\mu_0 = 0$, les champs des ondes longitudinales sont nuls et l'onde longitudinale se réduit toujours à une onde de potentiels. Si donc les potentiels n'ont aucune réalité physique, ces ondes peuvent être considérées comme inexistantes et il est paradoxal de les faire intervenir pour expliquer quoi que ce soit. En Mécanique ondulatoire du photon, où nous admettons que μ_0 n'est pas rigoureusement nul et que les potentiels ont un sens physique, les ondes longitudinales comportent à la fois des potentiels et un champ électrique : elles ont donc un sens physique et leur intervention pour expliquer certains phénomènes cesse d'être paradoxale. Ici la supériorité du point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon sur celui de la théorie quantique des champs nous paraît certain (¹).

Nous allons donc calculer, en Mécanique ondulatoire du photon, l'interaction de deux particules électrisées de charges e_1 et e_2 par l'intermédiaire des ondes longitudinales. Nous désignerons par i l'état initial du système formé par les deux particules et le rayonnement et par f l'état final de ce système. Nous savons que la probabilité d'une transition faisant passer le système de l'état i à l'état f par l'intermédiaire d'un état virtuel p est fournie par le carré d'un élément de

(¹) Beaucoup d'auteurs disent que les ondes longitudinales ne sont pas quantifiées puisqu'elles se trouvent éliminées quand on introduit à leur place l'énergie coulombienne. Nous ne partageons pas cette opinion. Le fait même d'interpréter l'interaction coulombienne par des échanges virtuels de photons montre que l'on admet l'existence des photons longitudinaux, donc la quantification des ondes longitudinales.

matrice H'_{fi} dont l'expression est

$$H'_{fi} = \sum_{p} \frac{H^{(1)}_{fp} H^{(1)}_{pi}}{E_i - E_p}, \tag{31}$$

$H^{(1)}$ étant la matrice d'interaction correspondant au potentiel perturbateur qui provoque les transitions.

Considérons donc l'onde électromagnétique longitudinale définie par le vecteur $\mathbf{k}$. Prenons l'axe des z dans la direction de $\mathbf{k}$. Nous avons comme expressions des potentiels longitudinaux

$$A_z = \sqrt{\frac{khc}{4\pi k_0^2 \nu}}\, P, \qquad V = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2 hc}{4\pi k k_0^2 \nu}}\, P \qquad (P = e^{i(k_0 t - \mathbf{kr})}). \tag{32}$$

La transition élémentaire par laquelle la particule de charge $e_j (j = 1, 2)$ cède de l'énergie et de la quantité de mouvement à l'onde longitudinale considérée en passant d'un état m de quantité de mouvement $\mathbf{K}_m \frac{h}{2\pi}$ à un état m' de quantité de mouvement $\mathbf{K}_{m'} \frac{h}{2\pi}$ a une probabilité proportionnelle au carré du module de l'élément de matrice (¹)

$$H^{(1)}_{lm',\,0m} = e_j \sqrt{\frac{hc}{4\pi k_0^2 \nu}} \left[\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}} \int_v \sum_{\sigma=1}^{4} a_\sigma^{(m')*} a_\sigma^{(m)} e^{-i(\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_{m'})\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{kr}}\, d\tau \right.$$
$$\left. + \sqrt{k} \int_v \sum_{\sigma=1}^{4} a_\sigma^{(m')*} \alpha_3 a_\sigma^{(m)} e^{-i(\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_{m'})\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{kr}}\, d\tau \right] \tag{33}$$

où $a^{(m)}$ et $a^{(m')}$ sont les amplitudes pour l'état initial et l'état final de la particule électrisée.

Sur l'expression (33), on voit que la transition n'a une probabilité différente de zéro que si

$$\mathbf{K}_{m'} - \mathbf{K}_m = \mathbf{k}, \tag{34}$$

c'est-à-dire s'il y a conservation de la quantité de mouvement. Mais il est facile de vérifier qu'il n'y a pas alors conservation de l'énergie : cette transition ne peut donc pas se produire seule. Par contre, deux transitions de ce type, dont chacune conserve la quantité de mouvement sans conserver l'énergie, peuvent se produire successivement en formant au total un processus qui conserve à la fois l'énergie et la quantité de mouvement et dont la probabilité sera donnée par le carré du module de l'élément de matrice (33).

(¹) Nous avons au second membre supprimé les indices l pour k et $\mathbf{k}$.

Nous allons considérer un tel processus formé par deux transitions successives subies par l'une, puis par l'autre des particules et ayant comme résultat global qu'une énergie E et une quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c} = \frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$ sont cédées par la particule (1) à la particule (2). Ce processus peut s'effectuer de deux manières différentes que nous allons successivement analyser.

Voici d'abord un premier mode d'accomplissement de cette cession d'énergie et de quantité de mouvement. La particule (1) subit d'abord la transition (01) → (1) en cédant à l'onde longitudinale considérée une quantité de mouvement $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$. Comme il doit y avoir conservation de la quantité de mouvement, nous aurons

$$\mathbf{K}_{01} - \mathbf{K}_1 = \mathbf{k}. \tag{35}$$

Le photon ainsi émis sur l'onde longitudinale $\mathbf{k}$ sans conservation de l'énergie est ensuite absorbé, toujours sans conservation de l'énergie, par la particule (2) qui passe ainsi d'un état (02) à un état (2) avec conservation de la quantité de mouvement exprimée par la relation

$$\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_{02} = \mathbf{k}. \tag{36}$$

Le processus global doit conserver l'énergie, ce qui nous donne

$$E = E_{01} - E_1 = E_2 - E_{02} = K\frac{hc}{2\pi}, \tag{37}$$

équation qui définit les grandeurs E et K.

L'élément de matrice correspondant au processus global est donc

$$\text{(38)} \quad H'_{fl} = e_1 e_2 \frac{hc}{4\pi k_0^2 v} \times \frac{\left(\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{1,01} + \sqrt{k}(\alpha_3)_{1,01}\right)\left(\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{2,02} + \sqrt{k}(\alpha_3)_{2,02}\right)}{E_l - E_p}$$

avec par exemple

$$(\alpha_3)_{1,01} = \int_v \sum_{16}^{4} a_\sigma^{(1)}\alpha_3 a_\sigma^{(01)}\,d\tau, \text{ etc.} \tag{39}$$

ou encore [1]

$$\text{(40)} \quad H'_{fl} = e_1 e_2 \frac{1}{2k_0^2 v} \frac{\left(\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{1,01} + k(\alpha_3)_{1,01}\right)\left(\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{2,02} + k(\alpha_3)_{2,02}\right)}{K - k}.$$

---

[1] Car $E_l - E_p = E_{01} - (E_1 + h\nu) = (K - k)\frac{hc}{2\pi}$ d'après (37).

Mais l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho_{m'm}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}_{m'm} = 0 \tag{41}$$

appliquée successivement aux transitions $(01) \to (1)$ et $(02) \to (2)$ donne

$$\mathrm{K}(1)_{1,01} = |\mathbf{k}|(\alpha_3)_{1,01}, \qquad \mathrm{K}(1)_{2,02} = |\mathbf{k}|(\alpha_3)_{2,02}, \tag{42}$$

d'où

$$\frac{(\alpha_3)_{j,0j}}{(1)_{j,0j}} = \frac{\mathrm{K}}{|\mathbf{k}|} \qquad (j = 1, 2) \tag{43}$$

et par suite

$$\left[\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{1,01} + \sqrt{k}(\alpha_3)_{1,01}\right]\left[\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{2,02} + \sqrt{k}(\alpha_3)_{2,02}\right] \tag{44}$$
$$= \left[\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{|\mathbf{k}|}\right]^2 (1)_{1,01}(1)_{2,02},$$

d'où enfin

$$_{(1)}\mathrm{H}'_{ll} = e_1 e_2 \frac{1}{2k_0^2 c} \frac{1}{\mathrm{K} - k}\left[\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{|\mathbf{k}|}\right]^2 (1)_{1,01}(1)_{2,02}. \tag{45}$$

Voici maintenant une seconde manière d'opérer entre les deux particules chargées le même échange global d'énergie et de quantité de mouvement. Tout d'abord, la particule (2) augmente son énergie de E et sa quantité de mouvement de $\mathbf{k}\frac{h}{2\pi}$ en passant de l'état initial (02) à l'état (2). Comme il doit y avoir conservation de la quantité de mouvement, cette particule doit céder l'impulsion $-\mathbf{k}\frac{h}{2\pi}$ à l'onde longitudinale $-\mathbf{k}$ sous forme d'un photon de recul et l'on a bien, en accord avec (36),

$$\mathbf{K}_{02} - \mathbf{K}_2 = -\mathbf{k}. \tag{46}$$

Le photon ainsi émis sur l'onde longitudinale $-\mathbf{k}$ sans conservation de l'énergie est ensuite absorbé par la particule (1) qui passe alors de l'état (01) à l'état (1); il y a alors bien conservation de l'impulsion puisque l'on a d'après (35)

$$\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{01} = -\mathbf{k}. \tag{47}$$

Il est évident que le processus global conserve aussi l'énergie puisque

$$\mathrm{E}_{01} + \mathrm{E}_{02} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2. \tag{48}$$

Ici, nous avons

$$(49)\qquad \mathrm{E}_t - \mathrm{E}_p = \mathrm{E}_{02} - (\mathrm{E}_2 + h\nu) = -\mathrm{E} - h\nu = -\frac{hc}{2\pi}(k + \mathrm{K}).$$

Comme les formules de normalisation sont visiblement les mêmes pour l'onde **k** et pour l'onde $-\mathbf{k}$, l'élément de matrice correspondant à ce second processus global est donc

$$(50)\qquad {}_{(2)}\mathrm{H}'_{ft} = -e_1 e_2 \frac{1}{2k_0^2 v} \frac{\left(\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{1,01} + k(\alpha_3)_{1,01}\right)\left(\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|^2}{k}}(1)_{2,02} + k(\alpha_3)_{2,02}\right)}{\mathrm{K} + k}.$$

La conservation de l'électricité fournit encore la relation (43), ce qui nous conduit finalement à la formule

$$(51)\qquad {}_{(2)}\mathrm{H}'_{ft} = -e_1 e_2 \frac{1}{2k_0^2 v} \frac{1}{\mathrm{K} + k}\left[\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{|\mathbf{k}|}\right]^2 (1)_{1,01}(1)_{2,02}.$$

Au total pour l'ensemble des deux processus, la probabilité du transfert de l'énergie E et de la quantité de mouvement $\mathbf{k}\frac{h}{2\pi}$ de la première à la seconde particule par l'intermédiaire des ondes longitudinales sera déterminée par l'élément de matrice

$$(52)\qquad \begin{aligned} \mathrm{H}'_{ft} = {}_{(1)}\mathrm{H}'_{ft} + {}_{(2)}\mathrm{H}'_{ft} &= \frac{e_1 e_2}{2k_0^2 v}\left[\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{|\mathbf{k}|}\right]^2 (1)_{1,01}(1)_{2,02}\left[\frac{1}{\mathrm{K} - k} - \frac{1}{\mathrm{K} + k}\right] \\ &= \frac{e_1 e_2}{k_0^2 v}\,\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\,\frac{[\,|\mathbf{k}|^2 + k\mathrm{K}\,]^2}{\mathrm{K}^2 - k^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02} \end{aligned}$$

Ici, nous allons faire intervenir une approximation qui concorde avec les hypothèses habituelles de l'électrostatique. On peut voir aisément que $\mathrm{K}\frac{hc}{2\pi}$ est l'énergie que perd l'une des particules quand elle cède au rayonnement l'impulsion $\mathbf{k}\frac{h}{2\pi}$. Il en résulte que pour les particules suffisamment lourdes, cette énergie est pratiquement négligeable, autrement dit que les particules ne sont pas sensiblement mises en mouvement par les processus considérés plus haut : on a alors le cas de l'électrostatique. Pour étudier ce cas, nous devons poser $\mathrm{K} = 0$ dans l'expression (50), ce qui nous donne

$$(53)\qquad \mathrm{H}'_{ft} = -\frac{e_1 e_2}{k_0^2 v}\frac{|\mathbf{k}|^2}{k^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02}$$

et, en tenant compte de la relation fondamentale $k^2 = |\mathbf{k}|^2 + k_0^2$

$$H'_{fi} = -\frac{e_1 e_2}{k_0^2 v}(1)_{1,01}(1)_{2,02} + \frac{e_1 e_2}{v}\frac{1}{k^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02}. \tag{54}$$

L'élément de matrice obtenu se compose de deux termes : le premier dépendant de μ_0 est caractéristique de la théorie du photon, mais le second, étant presque indépendant de μ_0, doit avoir une interprétation classique. Laissant de côté pour l'instant l'étude du premier terme sur laquelle nous reviendrons ensuite, nous allons montrer que le second terme de (54) correspond à l'existence entre les deux particules de l'interaction Coulombienne légèrement modifiée.

6. **Le potentiel de Coulomb.** — Nous voulons interpréter le second terme de H'_{fi} que nous écrirons

$$\frac{e_1 e_2}{v}\frac{1}{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02} \tag{55}$$

ou, d'après la conservation de la quantité de mouvement dans la transition $(01) \rightarrow (1)$

$$\frac{e_1 e_2}{v}\frac{1}{|\mathbf{K}_{01} - \mathbf{K}_1|^2 + k_0^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02}. \tag{56}$$

Soit $r = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ la distance des deux particules. Considérons le potentiel

$$\frac{e_1 e_2}{4\pi}\frac{e^{-k_0 r}}{r} \tag{57}$$

en unités d'Heaviside : c'est le potentiel de Coulomb, complété par un facteur exponentiel qui est très peu différent de zéro pour une distance pas trop grande. Nous allons calculer l'élément de matière correspondant à la transition globale $(01)(02) \rightarrow (1)(2)$ du système des deux particules et nous constaterons que cet élément est égal à (56).

Les ondes planes correspondant aux états (01,02) et (1,2) sont, en omettant le facteur de temps et en normant toujours dans le volume v

$$\frac{a_{01} a_{02}}{v} e^{-i(\mathbf{K}_{01}\mathbf{r}_1 + \mathbf{K}_{02}\mathbf{r}_2)}; \qquad \frac{a_1 a_2}{v} e^{-i(\mathbf{K}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{K}_2\mathbf{r}_2)}. \tag{58}$$

L'élément de matrice à calculer est donc

$$\frac{e_1 e_2}{4\pi v^2}\iint_v \frac{e^{-k_0 r}}{r} e^{i[(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{01})\mathbf{r}_1 + (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_{02})\mathbf{r}_2]} d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 (1)_{1,01}(1)_{2,02} \tag{59}$$

En prenant comme variable d'intégration

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{s}_{12} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, \tag{60}$$

cette expression s'écrit

$$(1)_{1,01}(1)_{2,02}\frac{e_1 e_2}{4\pi v^2}\int_v d\mathbf{r}_{12}\int_v \frac{d\mathbf{s}_{12}}{8}\frac{e^{-k_0 r}}{r}e^{i\frac{\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_{01}-\mathbf{K}_{02}}{2}\mathbf{s}_{12}}e^{i\frac{\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_{01}+\mathbf{K}_{02}}{2}\mathbf{r}_{12}}. \tag{61}$$

L'intégrale en $\mathbf{s}_{12}$ n'est différente de zéro que s'il y a conservation de la quantité de mouvement et, dans ce cas, elle est égale à $8v$. L'élément de matrice cherché est donc

$$\frac{e_1 e_2}{4\pi v}\int_v \frac{e^{-k_0 r}}{r}e^{i(\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{01})\mathbf{r}_{12}}d\mathbf{r}_{12}(1)_{1,01}(1)_{2,02}. \tag{62}$$

Pour faire l'intégration en $\mathbf{r}_{12}$, prenons le vecteur $\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{01}$ comme axe polaire : nous trouvons

$$\begin{aligned}(63)\qquad & \frac{e_1 e_2}{4\pi v}(1)_{1,01}(1)_{2,02}\,2\pi\int_0^\infty \frac{e^{-k_0 r}}{r}r^2\,dr\int_0^\pi e^{i|\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{01}|r\cos\theta}\sin\theta\,d\theta \\ & = \frac{e_1 e_2}{4\pi v}(1)_{1,01}(1)_{2,02}\,2\pi\int_0^\infty \frac{e^{i|\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{01}|r}-e^{-i|\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{01}|r}}{i|\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{01}|}e^{-k_0 r}\,dr \\ & = \frac{e_1 e_2}{v}(1)_{1,01}(1)_{2,02}\frac{1}{|\mathbf{K}_1-\mathbf{K}_{01}|^2+k_0^2}.\end{aligned}$$

Nous retombons bien ainsi sur l'expression (56).

Nous sommes donc parvenus au résultat suivant : en raison des interactions entre le rayonnement et les particules électrisées, tout se passe comme s'il existait entre deux particules chargées de charges e_1 et e_2 situées à la distance r l'une de l'autre une action électrostatique dérivant du potentiel quasi coulombien

$$V_1(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi}\frac{e^{-k_0 r}}{r} \tag{64}$$

toujours en unités d'Heaviside.

Étant donnée la valeur extraordinairement petite que peut au maximum posséder la masse μ_0 ($\mu_0 \leqq 10^{-45}$ gr), il faudrait se placer à des milliers de kilomètres d'une charge électrique pour que le facteur exponentiel commence à être un peu différent de l'unité. C'est dire que le potentiel V_1 se confond pratiquement toujours avec le potentiel de Coulomb.

7. Le potentiel de coïncidence. — Il nous reste à interpréter le premier terme de l'expression (54), ce que nous ferons en suivant la

même voie que pour le potentiel Coulombien. Nous allons, en effe montrer que le terme en question représente l'élément de matri(qui, pour un potentiel proportionnel à $\delta(\mathbf{r})$, correspond à la trans tion $(01, 02) \to (1, 2)$ du système des deux particules.

Pour cela, nous n'avons qu'à reprendre des calculs analogues à ce du paragraphe précédent. S'il existe un potentiel de la forme

$$A\,\delta(\mathbf{r}_{12}) = A\,\delta(x_1 - x_2)\,\delta(y_1 - y_2)\,\delta(z_1 - z_2) \tag{65}$$

entre les deux particules, l'élément de matrice à calculer est

$$\frac{A}{v^2} \iint_v \delta(\mathbf{r}_{12})\, e^{i[(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{01})\mathbf{r}_1 + (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_{02})\mathbf{r}_2]}\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 (1)_{1,01}(1)_{2,02}. \tag{66}$$

En introduisant comme précédemment les variables $\mathbf{r}_{12}$ et $\mathbf{s}_{12}$, il vie

$$\frac{A}{v^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02} \int_v d\mathbf{r}_{12} \int_v \frac{d\mathbf{s}_{12}}{8}\, \delta(\mathbf{r}_{12})\, e^{i\frac{\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_{01} - \mathbf{K}_{02}}{2}\mathbf{r}_{12}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_{01} + \mathbf{K}_{02}}{2}\cdot\mathbf{s}} \tag{67}$$

L'intégrale en $\mathbf{s}_{12}$ n'est différente de zéro que s'il n'y a conservatio de la quantité de mouvement et vaut alors $8v$. On a donc

$$\frac{A}{v}(1)_{1,01}(1)_{2,02} \int_v \delta(\mathbf{r}_{12})\, e^{i(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{01})\mathbf{r}_{12}}\, d\mathbf{r}_{12} = \frac{A}{v}(1)_{1,01}(1)_{2,02}, \tag{68}$$

d'après les propriétés de la fonction $\delta(\mathbf{r}_{12})$.

Il suffit alors de poser $A = -\frac{e_1 e_2}{k_0^2}$ pour retrouver le premier term de l'expression (54) de H'_{fi}. Nous pouvons donc interpréter ce terme e disant : tout se passe comme s'il existait entre les particules (1) et (2) en plus du potentiel électrostatique quasi coulombien (64), un autr potentiel d'interaction statique de la forme [1]

$$V_2(r) = -\frac{e_1 e_2}{k_0^2}\,\delta(\mathbf{r}) = -\frac{e_1 e_2}{k_0^2}\,\delta(x_1 - x_2)\,\delta(y_1 - y_2)\,\delta(z_1 - z_2). \tag{69}$$

Ce potentiel dépend à la fois de la constante h des quanta et de l masse propre du photon μ_0, toutes deux contenues dans la définitio de k_0. Il est nul pour toute distance finie des particules, mais sera infini si les deux particules se trouvaient au même point de l'espace On peut donc le considérer comme un *potentiel de coïncidence*.

---

[1] Dans une *Nouvelle théorie de la Lumière*, t. II, p. 125, on a imprimé pa erreur $\delta(r_{12})$ au lieu de $\delta(\mathbf{r}_{12})$, ce qui peut prêter à confusion.

Le potentiel V_2 peut d'ailleurs s'exprimer aussi par la formule

$$V_2(r) = \frac{e_1 e_2}{k_0^2} \frac{1}{2\pi r} \delta'(r), \tag{70}$$

où $\delta'(r)$ est la dérivée par rapport à r de la fonction singulière δ de Dirac de l'argument r (¹). L'emploi, un peu hardi au point de vue de la rigueur mathématique, de cette fonction $\delta'(r)$ conduit, comme l'a montré M. Dirac lui-même, à des conséquences exactes. L'application à $\delta'(r)$ de la formule d'intégration par parties permet de lui attribuer la propriété qu'exprime la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\delta'(r)\,dr = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(r)\delta(r)\,dr = -f'(0). \tag{71}$$

Pour voir que les expressions (69) et (70) sont équivalentes, il suffit de montrer que les fonctions $\delta(\mathbf{r})$ et $-\frac{1}{2\pi r}\delta'(r)$ sont elles-mêmes équivalentes, c'est-à-dire en somme qu'en appliquant à une fonction $f(r)$ les opérations $\int \delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ et $\int \left(-\frac{1}{2\pi r}\delta'(r)\right) d\mathbf{r}$, on obtient le même résultat.

Or, la définition de $\delta(\mathbf{r})$ donne tout d'abord

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\delta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz = f(0), \tag{72}$$

puis en tenant compte du fait que $f(r) = f(|\mathbf{r}|)$ est une fonction paire de r

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\left(-\frac{1}{2\pi r}\delta'(r)\right) d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2\pi r}\delta'(r)\right) f(r) 4\pi r^2\,dr = -2\int_0^{\infty} \delta'(r) f(r) r\,dr \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(r) r f(r)\,dr = \left[\frac{d}{dr}(r f(r))\right]_{r=0} \\ &= [r f'(r) + f(r)]_{r=0} = f(0). \end{aligned} \tag{73}$$

L'égalité des résultats (72) et (73) démontre l'équivalence annoncée.

En adoptant l'expression (70) de V_2 on obtient pour le potentiel

---

(¹) Notre attention a été attirée sur ce point par un travail de M. Gérard Petiau.

électrostatique total

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi r}\left[e^{-k_0 r} + \frac{2\delta'(r)}{k_0^2}\right]. \tag{74}$$

A toute distance qui n'est ni nulle, ni extraordinairement grande, le potentiel se réduit au potentiel de Coulomb $\frac{e_1 e_2}{4\pi r}$.

Nous avons signalé ailleurs [1] comment l'apparition du potentiel de coïncidence est en relation avec le fait qu'en Mécanique ondulatoire du photon, div$\mathbf{E}$ n'est pas nulle, mais égale à $k_0^2 V$ et nous avons souligné l'intérêt de cette constatation.

8. **Formule de Möller.** — Nous avons calculé l'expression de l'élément de matrice H'_{fi} relatif à l'interaction des deux particules par l'intermédiaire d'une onde longitudinale de vecteur $\mathbf{k}$. Nous voulons maintenant calculer les termes supplémentaires qui s'introduisent si l'on tient compte aussi des ondes transversales.

Les potentiels *normés* représentant l'onde transversale de vecteur $\mathbf{k}$ quand la direction de propagation est prise pour axe des z sont

$$A_x = \sqrt{\frac{hc}{4\pi k\nu}}\,P, \qquad A_y = \sqrt{\frac{hc}{4\pi k\nu}}\,P \qquad (P = e^{i(kct - |\mathbf{k}|z)}). \tag{75}$$

Nous devons faire des calculs très analogues à ceux des paragraphes précédents et, en particulier, nous devons encore distinguer les deux modes d'échange d'énergie et de quantité de mouvement entre les deux particules rencontrées plus haut. Dans le premier mode d'échange, on a

$$E_l - E_p = \frac{hc}{2\pi}(K - k) \tag{76}$$

et l'élément de matrice pour le processus global d'échange d'énergie et d'impulsion par l'intermédiaire de l'onde transversale s'écrit

$$\begin{aligned} {}_{(1)}H'_{fi} &= \frac{e_1 e_2}{\nu}\,\frac{hc}{4\pi k}\,\frac{(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02}}{E_l - E_p} \\ &= \frac{e_1 e_2}{2k\nu}\,\frac{(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02}}{\mathbf{k} - k}. \end{aligned} \tag{77}$$

On calculera de même l'élément de matrice ${}_{(2)}H'_{fi}$ relatif à l'action des

---

[1] Voir *Nouvelle théorie de la Lumière*, t. II, p. 125-127.

ondes transversales dans le second mode d'échange d'énergie et d'impulsion pour lequel on a

$$(77)\qquad E_i - E_p = \frac{hc}{2\pi}(\mathbf{K} + k)$$

et l'on trouvera

$$(78)\qquad {}_{(2)}H'_{fi} = -\frac{e_1 e_2}{2kc}\,\frac{(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02}}{\mathbf{K} - k}.$$

Finalement, pour l'interaction totale par l'intermédiaire des ondes transversales $\pm\mathbf{k}$, l'on obtient

$$(79)\qquad H'_{fi} = {}_{(1)}H'_{fi} + {}_{(2)}H'_{fi} = \frac{e_1 e_2}{c}\,\frac{(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02}}{\mathbf{K}^2 - k^2},$$

puis, en ajoutant l'interaction quasi coulombienne V_1 due aux ondes longitudinales

$$(80)\qquad H'_{fi} = \frac{e_1 e_2}{c}\left[\frac{1}{k^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02} - \frac{(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02}}{\mathbf{K}^2 - k^2}\right],$$

soient alors $\vec{\alpha}_{(1)}$ et $\vec{\alpha}_{(2)}$ les vecteurs dont les composantes rectangulaires sont

$$(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_2)_{1,01}(\alpha_3)_{1,01} \quad \text{et} \quad (\alpha_1)_{2,02}(\alpha_2)_{2,02}(\alpha_3)_{2,02}.$$

Le produit scalaire

$$(81)\qquad \left(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\alpha}_{(2)}\right) = (\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02} + (\alpha_3)_{1,01}(\alpha_3)_{2,02}$$

est invariant pour une rotation des axes de coordonnées, ce qui permet de l'évaluer en plaçant l'axe des z dans la direction du vecteur $\mathbf{k}$. Or, nous avons vu que dans l'un et l'autre mode d'échange des énergies et des impulsions, les relations (43) étaient valables, ce qui nous donne

$$(82)\qquad \begin{aligned}(\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} + (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02} &= \left(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\alpha}_{(2)}\right) - (\alpha_3)_{1,01}(\alpha_3)_{2,02}\\ &= \left(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\alpha}_{(2)}\right) - \frac{\mathbf{K}^2}{|k|^2}(1)_{1,01}(1)_{2,02},\end{aligned}$$

d'où, en portant ce résultat dans (80),

$$(83)\qquad H'_{fi} = \frac{e_1 e_2}{c}\left[\left(\frac{1}{k^2} - \frac{\mathbf{K}^2}{|\mathbf{k}|^2(k^2 - \mathbf{K}^2)}\right)(1)_{1,01}(1)_{2,02} - \frac{\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\alpha}_{(2)}}{k^2 - \mathbf{K}^2}\right].$$

Si nous négligeons les termes en μ_0^2, nous obtenons la formule valable dans tout système de référence Galiléen

$$(84)\qquad H'_{fi} = \frac{e_1 e_2}{c}\,\frac{(1)_{1,01}(1)_{2,02} - (\alpha_1)_{1,01}(\alpha_1)_{2,02} - (\alpha_2)_{1,01}(\alpha_2)_{2,02} - (\alpha_3)_{1,01}(\alpha_3)_{2,02}}{k^2 - \mathbf{K}^2}.$$

C'est la formule de Möller. On peut l'interpréter aisément. Le rapport $\left(\frac{K}{k}\right)^2$ est une correction de relativité de l'ordre de $\left(\frac{v}{c}\right)^2$. Si l'on néglige cette correction, ce qui revient à admettre la propagation instantanée des actions électromagnétiques, on peut barrer K^2 au dénominateur de (84). De même que le second terme de l'expression (54) a pu s'interpréter par l'existence d'un potentiel pratiquement identique au potentiel de Coulomb, les trois derniers termes de (84) pourront ici s'interpréter comme traduisant le fait que les deux charges électriques en mouvement sont équivalentes à des courants de convection exerçant l'un sur l'autre les actions bien connues de Laplace et que, de plus, ces charges ont des moments magnétiques propres (dus au spin) possédant une énergie mutuelle. C'est ce qu'on prouverait aisément en rappelant la signification physique de la matrice vecteur $\vec{\alpha}$ qui en théorie de Dirac, correspond au courant total dû au mouvement d'un électron, c'est-à-dire à l'ensemble du courant de convection et du courant lié à l'existence du magnétisme propre (¹). On voit ainsi que la formule de Möller représente, dans la limite des approximations admises, les interactions électromagnétiques des deux particules électrisées en mouvement.

Il est intéressant de souligner que les interactions entre particules résultent, d'après ce qui précède, d'une transition double faisant au total passer le photon de l'état d'annihilation à l'état d'annihilation. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.

9. **Difficultés soulevées par les théories précédentes.** — Les expressions obtenues pour les énergies d'interaction de deux particules soulèvent une grave difficulté qui n'a pu jusqu'ici être levée par aucune forme de la théorie quantifiée des champs électromagnétiques : elles conduisent à attribuer à toute particule électrisée une énergie propre infinie. En effet, cette énergie propre doit s'obtenir en appliquant les formules précédentes au cas où les particules (1) et (2) coïncident. La présence des facteurs $\frac{1}{r_{12}}$ et $\delta(\mathbf{r}_{12})$ dans les formules telles que (74) donnent bien alors une valeur infinie pour l'énergie propre. De plus, si les calculs d'approximations successives donnent souvent en première approximation de bons résultats, par contre les approximations supé-

(¹) Sur ce point, *voir*, par exemple, *Théorie générale des particules à spin*, p. 89 et suiv.

rieures donnent en général des intégrales divergentes. Par exemple, si l'on évalue l'énergie propre d'un électron résultant de son interaction avec les ondes transversales, on trouve zéro en première approximation, ce qui est satisfaisant, mais en seconde approximation, on trouve une intégrale divergente donnant une valeur infinie.

La Mécanique ondulatoire conduit donc ici exactement aux mêmes difficultés que la théorie quantique des champs usuelle, mais il semble qu'elle permette d'en préciser l'origine. Les valeurs infinies trouvées par les énergies propres résultent en effet de l'hypothèse implicitement admise suivant laquelle il peut y avoir des interactions entre l'électron et *toutes* les composantes du rayonnement si élevée que soit leur fréquence. Or, d'après la formule de Jeans, le nombre de ces composantes croît indéfiniment avec la fréquence et de là résulte la divergence des intégrales auxquelles conduisent les calculs d'approximations successives. Mais la Mécanique ondulatoire du photon, en écrivant l'expression $H^{(1)}$ de l'opérateur d'interaction entre électron et rayonnement y introduit, nous l'avons vu, le facteur $\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})$ qui traduit le caractère rigoureusement ponctuel de l'électron. Or il est aisé de se rendre compte que toute la difficulté vient de ce facteur.

Cette constatation a suggéré à l'auteur du présent Ouvrage une idée qu'il avait exprimée dès 1935 (¹). Cette idée consiste à remplacer dans le terme d'interaction électron-rayonnement la fonction singulière $\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})$, qui est nulle pour toute valeur de $\mathbf{R}$ autre que $\mathbf{r}$ (aiguille infiniment fine), par une fonction qui serait nulle partout sauf au voisinage immédiat de $\mathbf{R}=\mathbf{r}$ (aiguille très fine). Les dimensions de la région où cette fonction ne serait pas nulle correspondraient à l'ancienne notion de « rayon de l'électron ». A titre d'essai (²), il était suggéré de remplacer $\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})$ par $e^{-\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})^2}{\sigma^2}}$ où σ serait une longueur très petite jouant le rôle du rayon r_0 de l'électron au sens classique. On éviterait ainsi la plupart des divergences fâcheuses signalées plus haut et il est facile d'en comprendre la raison. Ces divergences résultent, nous l'avons vu, du fait que les ondes électromagnétiques réagissent sur l'électron quelque petite que soit leur longueur d'onde, et ceci en raison du caractère strictement « ponctuel » de la fonction δ : mais, si l'on substitue à δ une fonction telle que $e^{-\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{r})^2}{\sigma^2}}$, dès que le longueur

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 361.

(²) On pourrait aussi considérer une fonction constante à l'intérieur d'une sphère de très petit rayon et nulle au dehors.

d'onde descendra sensiblement au-dessous de la valeur σ, les grandeurs électromagnétiques de l'onde subiront plusieurs oscillations à l'intérieur de la sphère de rayon σ et, par suite d'une compensation d'effets, l'action de l'onde sur l'électron sera nulle.

Avec cette hypothèse, les ondes en nombre indéfiniment croissant qui forment l'extrémité du spectre du rayonnement du côté des grandes fréquences n'agiraient plus sur l'électron et les divergences gênantes seraient évitées. On ne reviendrait pas ainsi, à proprement parler, à l'idée classique d'un électron ayant une structure et occupant une région finie de l'espace avec des dimensions de l'ordre de r_0. Grâce à l'introduction de longueur σ, on définirait une nouvelle sorte de « rayon de l'électron » correspondant à une « incertitude » sur le point d'application exact du champ électromagnétique sur la charge et cette définition, qui éviterait toute image structurale, paraît conforme aux conceptions générales des théories quantiques actuelles.

Malheureusement les idées précédentes se heurtent à des difficultés du point de vue de l'invariance relativiste. Ces difficultés sont liées au caractère « spatial » du nouveau rayon de l'électron σ. On ne rencontre pas ces difficultés de variance si l'on garde dans le terme d'interaction la fonction δ, mais alors, comme on introduit implicitement le caractère ponctuel de l'électron, les difficultés d'énergie infinie surgissent.

Ne sachant comment échapper à ce dilemne, l'auteur n'avait pas poursuivi dans cette voie. Mais récemment deux autres auteurs qui ne connaissaient pas la note citée plus haut ont repris des idées analogues.

Dans une série de très intéressants mémoires et exposés [1], M. Arthur March, après avoir approfondi la notion de « plus petite longueur » introduite par M. Heisenberg, a proposé une nouvelle manière de tenir compte, dans les termes d'interactions entre matière et rayonnement, du rayon de l'électron. Cette manière de voir est apparentée à celle que nous avons exposée, mais pour éviter les difficultés d'invariance relativiste, M. March réintroduit sous une forme nouvelle la « contraction de Lorentz » de l'électron et montre qu'on parvient ainsi à écarter un grand nombre d'obstacles rencontrés par la théorie quantique des champs. Bien que la théorie de M. March ne soit pas à l'abri de toute objection et qu'il ait dû déjà en modifier certains points, il y a là une tentative très intéressante qu'il ne faut pas perdre de vue.

---

[1] *Naturwissenschaften*, 31, 1943, p. 49; *Acta physica austriaca*, 1, 1947, p. 19; *Quantentheorie der Wellenfelder und kleinste Länge*. Jora, Innsbrück, 1947.

Dans un récent travail, M. Nathan Rosen [1], sans avoir connaissance de notre Note de 1935 a introduit dans le terme d'interaction entre matière et rayonnement une exponentielle de forme gaussienne. Il a rattaché l'introduction de cette fonction à une intéressante distinction entre « l'espace abstrait » et « l'espace observable » et il a cherché à se débarrasser des difficultés d'invariance relativiste en admettant que cette invariance n'est valable que dans l'espace abstrait.

Les travaux de MM. March et Rosen n'apportent sans doute pas la solution définitive du problème des énergies infinies, mais ils indiquent d'intéressantes voies à suivre et ces voies présentent de l'analogie avec celle que suggérait la Mécanique ondulatoire du photon.

---

(1) *Physical Review*, 72, 1947, p. 298.

CHAPITRE XII.

PASSAGE DES CHAMPS MICROSCOPIQUES COMPLEXES AUX CHAMPS MICROSCOPIQUES RÉELS.

1. Généralités. — Par définition, nous appelons échelle microscopique celle où il est nécessaire de tenir compte de l'existence des quanta. A cette échelle, les interactions donnent lieu à des processus quantiques discontinus dont la représentation fait intervenir les fonctions d'onde de la Mécanique ondulatoire du photon qui sont des grandeurs essentiellement complexes. La Mécanique ondulatoire du photon est ainsi amenée, en étudiant les interactions à l'échelle microscopique des photons et des particules électrisées, à introduire des champs et des potentiels complexes et à écrire une équation d'ondes du système photon + électron permettant de calculer les probabilités des transitions quantiques provoquées par les interactions photon-particule électrisée.

Les considérations des chapitres précédents nous ont d'ailleurs appris que les grandeurs électromagnétiques complexes F représentent les phénomènes d'absorption, tandis que les grandeurs conjuguées F^* représentent les phénomènes d'émission. Ces rôles respectifs des F et F^* correspondent exactement aux rôles que le principe de correspondance fait jouer depuis longtemps aux composantes complexes conjuguées du moment électrique de l'atome (¹).

Or, lorsqu'on décrit les interactions à grande échelle de la matière électrisée et du champ électromagnétique, on fait toujours usage des champs *réels*, aussi bien dans la théorie de Maxwell qui décrit les phénomènes observables à notre échelle que dans la théorie la plus fine de Lorentz qui cherche à représenter les phénomènes à l'échelle des particules élémentaires. Nous considérons ici ces théories, même celle de Lorentz, comme des théories macroscopiques, parce qu'elles ne tiennent pas compte des quanta et qu'elles ne peuvent, par suite, s'appliquer qu'à des phénomènes mettant en jeu un nombre immense de quanta et

(¹) Voir *Une nouvelle théorie de la Lumière*, t. II, Chap. III, p. 79.

où une apparente continuité statistique vient masquer la réalité discontinue.

Nous allons raisonner sur la théorie de Lorentz qui serre de plus près les faits élémentaires que la théorie de Maxwell. Il est bien connu qu'elle décrit l'interaction entre champ électromagnétique et particules électrisées de la façon assez dissymétrique suivante. D'une part, elle considère le mouvement des particules électrisées dans le champ électromagnétique comme s'effectuant suivant les lois classiques du point matériel (modifiée par les corrections de relativité si les vitesses sont voisines de c), la force subie par une particule de charge ε étant la force de Lorentz définie par la formule

$$\mathbf{f} = \varepsilon\left[\mathbf{E} + [\mathbf{v}\,\mathbf{H}]\right]. \tag{1}$$

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ dérivent des potentiels $\mathbf{A}$ et V par les formules

$$\mathbf{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}, \tag{2}$$

toutes ces grandeurs étant essentiellement réelles. D'autre part, la théorie de Lorentz représente l'influence exercée sur le champ électromagnétique par la présence et le mouvement des charges électriques par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathbf{E}, && \text{div}\,\mathbf{H} = 0, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathbf{H} - \rho\frac{\mathbf{v}}{c} && \text{div}\,\mathbf{E} = \rho, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ρ étant la densité de l'électricité en chaque point, $\mathbf{v}$ sa vitesse, les unités employées étant celles d'Heaviside.

Il s'agit de savoir comment l'équation d'ondes du système électron + photon de la Mécanique ondulatoire du photon, qui contient des grandeurs électromagnétiques complexes, peut permettre, quand on passe du microscopique quantique au macroscopique de Lorentz, de retrouver la représentation des interactions entre matière et rayonnement de la théorie électromagnétique classique, représentation où interviennent les champs réels. Dans cette tentative, nous allons être guidé par le résultat obtenu précédemment suivant lequel on a affaire à un phénomène mettant en jeu un nombre immense de photons, la valeur moyenne dans l'espace des n d'une grandeur électromagnétique F, valeur moyenne seule observable à l'échelle macroscopique,

est donnée par la formule [1]

$$(4) \qquad \overline{\mathrm{F}} = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}}\, \mathrm{F}_{\mathbf{k}}^{(r)} = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}}(\mathrm{F}_{\mathbf{k}} + \mathrm{F}_{\mathbf{k}}^{*}),$$

où $\mathrm{F}_{\mathbf{k}}$ est la grandeur électromagnétique complexe définie pour un photon dans l'état **k** par la Mécanique ondulatoire du photon superquantifiée.

Nous allons commencer par étudier le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique à un très grand nombre de photons et montrer qu'on peut ainsi retrouver l'expression (1) de la force de Lorentz. Puis nous chercherons à retrouver de même les équations (3) de Lorentz pour les champs électromagnétiques réels en partant de l'électron d'ondes du système photon + électron dans le cas où l'électron est animé d'un mouvement macroscopiquement observable, c'est-à-dire correspondant à un très grand nombre de quanta.

2. Mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique à grand nombre de photons. — Rappelons d'abord la forme générale (donnée p. 152) de l'équation d'ondes non superquantifiée du système photon + électron

$$(5) \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2}\Psi_{\rho\sigma\tau}$$
$$= \left\{ \mathrm{H}_{\mathrm{D}}\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2} + \mathrm{H}_{\mathrm{P}} - \mathrm{K}'e \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\mathfrak{B}_4 - \mathfrak{A}_4}{2}\,\mathrm{I} - \left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}_4 - \vec{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}_4}{2} \right) \right] \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \right\} \Psi_{\rho\sigma\tau}.$$

Nous allons introduire la seconde quantification pour les photons, mais sans l'introduire pour l'électron. Cette méthode un peu bâtarde est justifiée par la nécessité de considérer toujours un nombre énorme de photons comme présents dans l'état d'annihilation. Tenant compte de la normalisation des Ψ du photon en $\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2}$, nous sommes ainsi amenés à écrire à la place de (5)

$$(6) \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, n_0, n_1, \ldots, t) = [\mathrm{H}_{\mathrm{D}} + \mathcal{H}_{\mathrm{P}} + \mathcal{H}^{(1)}]\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, n_0, \ldots, t),$$

---

[1] Chapitre IX, formule (58).

où $\mathcal{H}_P$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ sont les opérateurs de l'espace des n définis par les formules

$$(7) \qquad \mathcal{H}_P = \sum_{ij} (c_i^*)_{op} (H_P)_{ij} (c_j)_{op}, \qquad \mathcal{H}^{(1)} = \sum_{ij} (c_i^*)_{op} H_{ij}^{(1)} (c_j)_{op},$$

avec

$$(8) \qquad H^{(1)} = -K'e \left[\frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1}{2} 1 - \left(\vec{\alpha} \frac{\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_1 - \vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_1}{2} \right) \right],$$

les éléments de matrice $H_{ij}^{(1)}$ étant toujours calculés dans le système des fonctions propres du photon non perturbé.

Dans (6), la fonction Ψ est la fonction d'onde du système formé par l'électron et les photons et, si $\Psi^{(m)}$ désigne les fonctions propres de l'électron, on pourra toujours écrire

$$(9) \qquad \Psi(X, Y, Z, n_0, n_1, \ldots, t) = \sum_{\substack{m \\ l}} c_{m,l}(t) \Psi^{(m)}(X, Y, Z, t) R^{(l)}(n_0, n_1, \ldots, t).$$

Mais le nombre des photons non annihilés présents est par hypothèse immense. Il en résulte que l'évolution de l'électron modifie infiniment peu la valeur des n de sorte que tous les termes de la somme $\sum_{\substack{m \\ l}}$ contiennent des formes de R extrêmement voisines : on est donc autorisé à poser approximativement

$$(10) \qquad \begin{aligned} \Psi(X, Y, Z, n_0, n_1, \ldots, t) &= R(n_0, n_1, \ldots, t) \sum_m c_{m,(n)}(t) \Psi^{(m)}(X, Y, Z, t) \\ &= R(n_0, n_1, \ldots, t) \Psi(X, Y, Z, t), \end{aligned}$$

où (n) désigne l'ensemble des valeurs des n figurant dans R et où $\Psi(X, Y, Z, t)$ définie par le développement $\sum_m$ est la fonction d'onde de l'électron. L'expression de la fonction d'onde du système est ainsi décomposée en un produit de deux termes, dont l'un se rapporte aux photons et l'autre à l'électron. La perturbation subie par le champ électromagnétique par suite de la présence de l'électron étant pratiquement négligeable, nous pouvons écrire

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial t} R(n_0, n_1, \ldots, t) = \mathcal{H}_P R(n_0, n_1, \ldots, t), \qquad R = R_1(n_0, n_1, \ldots) e^{2\pi i \sum_j n_j \nu_j t},$$

et tenant compte de calculs faits précédemment (p. 136), l'équation (6)

peut s'écrire

$$(12)\quad \frac{h}{2\pi i} R_1(n_0, n_1, \ldots) \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial t}$$
$$= R_1(n_0, n_1, \ldots) H_D \Psi_\rho - e\left[V_{(r)}\, 1 + (\vec{\alpha}\, \mathbf{A}_{(r)})\right] R_1(n_0, n_1, \ldots) \Psi_\rho,$$

où

$$(13)\qquad V_{(r)} = \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} + c^*_{\mathbf{k}} V^*_{\mathbf{k}}), \qquad \mathbf{A}_{(r)} = \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}} \mathbf{A} + c^*_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}).$$

Multiplions (12) par R^* et sommons sur les n en tenant compte de la condition de normalisation

$$(14)\qquad \sum_n |R|^2 = \sum_n |R_1|^2 = 1,$$

il vient

$$(15)\qquad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial t} = H_D \Psi_\rho - e\left[\overline{V}\, 1 + (\vec{\alpha}\, \overline{\mathbf{A}})\right] \Psi_\rho$$

avec

$$(16)\qquad \begin{cases} \overline{V} = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}}\, V^{(r)}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}} (V_{\mathbf{k}} + V^*_{\mathbf{k}}), \\ \overline{\mathbf{A}} = \sum \sqrt{n_{\mathbf{k}}}\, \mathbf{A}'_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{n_{\mathbf{k}}} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}). \end{cases}$$

où $V_{\mathbf{k}}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ sont les potentiels (scalaires et vecteurs) complexes définis pour *un* photon dans l'état **k** par la Mécanique ondulatoire du photon non superquantifiée.

On remarquera que dans la définition de $V_{\mathbf{k}}$ et de $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$, les facteurs K' et $\sqrt{n_0}$ se sont unis pour donner la constante $K = K'\sqrt{n_0}$, comme nous l'avons précédemment expliqué.

Si maintenant nous explicitons l'opérateur H_D qui est Hamiltonien de Dirac pour un électron *libre*, nous trouvons

$$(17)\qquad \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \overline{V}\right) \Psi_\rho = \sum_{1} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e}{c} \overline{A}_j\right) \alpha_j \Psi_\rho + \alpha_4 m_0 c \Psi_\rho$$
$$(\rho = 1, 2, 3, 4).$$

Nous retombons ainsi sur les équations de Dirac pour un électron placé dans un champ électromagnétique dérivant des potentiels *réels* $\overline{V}$ et $\overline{\mathbf{A}}$. Or nous savons que, quand les approximations de l'optique géométrique sont valables, ces équations de Dirac nous ramènent aux mouvements

classiques de l'électron soumis aux champs électromagnétiques *réels* dérivant des potentiels V et $\overline{\mathbf{A}}$, mouvements tels qu'ils sont décrits par l'ancienne Dynamique des électrons quand on admet l'existence de la force de Lorentz (1).

Finalement, on retrouve donc bien la manière classique de décrire les mouvements de l'électron qui consiste à lui appliquer les équations de la Dynamique ponctuelle et à admettre l'existence de la force de Lorentz définie par les champs macroscopiques réels.

3. Justification des équations (3) de Lorentz pour les champs réels. — Il nous reste à chercher comment nous pouvons faire dériver de l'équation d'onde du système photon-électron les équations (3) de Lorentz qui lient les valeurs des champs macroscopiques réels et leurs variations à la position et au mouvement des charges électriques.

Nous partirons encore de l'équation (5) du système photon-électron, mais nous supposerons maintenant que nous avons affaire à un électron dont le mouvement correspond à un très grand nombre de quanta de sorte que ce mouvement soit extrêmement peu troublé par l'interaction avec le rayonnement. Nous pouvons alors poser [1]

$$\Psi_{\rho\sigma\tau} \sim \Psi_\rho \Psi_{\sigma\tau}, \tag{18}$$

et admettre que l'équation

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi_\rho}{\partial t} = \mathrm{H}_{\mathrm{P}} \Psi_\rho, \tag{19}$$

qui serait valable rigoureusement en l'absence d'interactions de l'électron avec le rayonnement, reste très approximativement satisfaite. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i}\Psi_\rho \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} \\ = \Psi_\rho \mathrm{H}_{\mathrm{P}} \Psi_{\sigma\tau} - \mathrm{K}'_0 \left[\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}\,1 - \left(\vec{\alpha}\,\frac{\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4-\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4}{2}\right)\right]\delta(\mathbf{R}-\mathbf{r})\Psi_\rho\Psi_{\sigma\tau}. \end{aligned} \tag{20}$$

Considérons un état de l'électron extrêmement voisin de l'état que représente Ψ_ρ. Soient Ψ'_ρ les composantes de la fonction d'onde Ψ liée à cet état. Nous avons très sensiblement

$$\int_v \sum_\rho \Psi'^{*}_\rho \Psi_\rho \, d\tau \simeq \int_v \sum_\rho |\Psi_\rho|^2 \, d\tau = 1. \tag{21}$$

(1) Il suffit pour le voir de transposer le raisonnement fait au début du précédent paragraphe.

Multiplions l'équation (20) par $\Psi_\rho'^*$, sommons sur ρ et intégrons sur $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{V}$. En introduisant les densités d'éléments de matrice

$$(22)\qquad \rho = -e\sum_\rho \Psi_\rho'^* \Psi_\rho, \qquad \mathbf{i} = ec\sum_\rho \Psi_\rho'^* \vec{\alpha}\Psi_\rho,$$

relatives à la transition $\Psi_\rho \rightarrow \Psi_\rho'$ et rapportées au point $\mathbf{r}$, nous obtenons

$$(23)\qquad \frac{hc}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\Psi_{\sigma\tau} = \mathrm{H_P}\Psi_{\sigma\tau} + \mathrm{K}'\left[\frac{\mathcal{B}_4-\mathcal{A}_4}{2}\rho + \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\frac{\vec{\mathcal{B}}\mathcal{A}_4-\vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_4}{2}\right)\right]\Psi_{\sigma\tau},$$

avec la définition

$$(24)\qquad \mathrm{H_P} = \frac{hc}{2\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_4+\mathcal{B}_1\mathcal{A}_4}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_4+\mathcal{B}_2\mathcal{A}_4}{2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathcal{A}_3\mathcal{B}_4+\mathcal{B}_3\mathcal{A}_4}{2} + ik_0\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\right].$$

Pour tirer de l'équation obtenue les équations de Lorentz, nous allons avoir à utiliser un certain nombre de remarques.

Soit d'abord $\Psi^{(0)}$ la fonction d'annihilation du photon telle que

$$(25)\qquad \Psi_{\sigma\tau}^{(0)} = (\alpha_4)_{\sigma\tau}.$$

Nous vérifions aisément les relations

$$(26)\qquad \sum_{\sigma\tau}\Psi_{\sigma\tau}^{(0)*}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi_{\sigma\tau}^{(0)} = -4, \qquad \sum_{\sigma\tau}|\Psi_{\sigma\tau}^{(0)}|^2 = 4.$$

Si maintenant $\mathcal{A}$ désigne l'une des matrices à seize lignes et seize colonnes (autre que la matrice unité) obtenues en faisant le produit de matrices $\mathcal{A}_r$ et si $\mathcal{B}$ désigne de même l'une des matrices à seize lignes et seize colonnes (autre que la matrice unité) obtenues en faisant le produit de matrices $\mathcal{B}_r$, on vérifie que l'on a

$$(27)\qquad \sum_{\sigma\tau}\Psi_{\sigma\tau}^{(0)*}\mathcal{A}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi_{\sigma\tau}^{(0)} = 0, \qquad \sum_{\sigma\tau}\Psi_{\sigma\tau}^{(0)*}\mathcal{B}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi_{\sigma\tau}^{(0)} = 0.$$

Enfin, en tenant compte des définitions des matrices $\mathcal{A}_r$ et $\mathcal{B}_r$, on trouve que

$$(28)\qquad \sum_{\sigma\tau}\Psi_{\sigma\tau}^{(0)*}\frac{\mathcal{A}_j-\mathcal{B}_j}{2}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma\tau}\Psi_{\sigma\tau}^{(0)*}\frac{\mathcal{B}_j-\mathcal{A}_j}{2}\Psi_{\sigma\tau} \qquad (j=1,2,3),$$

$\Psi_{\sigma\tau}$ étant les composantes de la fonction d'onde d'un état non annihilé quelconque.

Armés de l'ensemble de ces remarques, revenons à l'équation (23) et cherchons par exemple à en tirer l'équation de Lorentz $\operatorname{div} \mathrm{E} = \rho$.

Pour faire disparaître de l'équation (23) les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$, nous commencerons par la multiplier $\mathcal{A}_4 - \mathcal{B}_4$, car

$$(29) \qquad (\mathcal{A}_4 - \mathcal{B}_4)(\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4) = \mathcal{A}_4^2 - \mathcal{B}_4^2 = 0.$$

Puis nous multiplierons par $\Psi_{\sigma\tau}^{*(0)}$ à gauche et nous sommerons sur σ et et sur τ. Nous obtiendrons ainsi (en utilisant la convention de sommation des indices)

$$(30) \qquad \sum_{l=1}^{3} \frac{hc}{2\pi i} \Psi_{\sigma\tau}^{*(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\mathcal{B}_l \mathcal{B}_4 \mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_l \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4}{2} + \frac{\mathcal{B}_l - \mathcal{A}_l}{2} \right] \Psi_{\sigma\tau}$$
$$+ \frac{hc}{2\pi} k_0 \Psi_{\sigma\tau}^{*(0)} \frac{\mathcal{B}_4 - \mathcal{A}_4}{2} \Psi_{\sigma\tau}$$
$$= \mathrm{K}' \Psi_{\sigma\tau}^{*(0)} \left[(1 - \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4)\rho - \left(\frac{\mathrm{i}}{c} \frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2} \right) - \left(\frac{\mathrm{i}}{c} \frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2} \right) \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4 \right] \Psi_{\sigma\tau}.$$

Écrivons maintenant le développement de $\Psi_{\sigma\tau}$ (en ne conservant suivant notre règle que les ondes à énergie positive)

$$(31) \qquad \Psi_{\sigma\tau} = c_0 \Psi_{\sigma\tau}^{(0)} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \Psi_{\sigma\tau}^{(\mathbf{k})},$$

c_0 et les $c_{\mathbf{k}}$ étant les opérateurs de la seconde quantification respectivement proportionnels à $\sqrt{n_0}$ et aux $\sqrt{n_{\mathbf{k}}}$. Rappelons-nous que n_0 est extrêmement grand et évaluons l'ordre de grandeur des divers termes de notre équation. Au premier membre, nous avons des termes de la forme $\Psi_{\sigma\tau}^{*(0)} \frac{\partial \Psi_{\sigma\tau}^{(\mathbf{k})}}{\partial x_l}$ qui sont finis.

Au second membre, comme le coefficient $\mathrm{K}' = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{n_0}}$ est extrêmement petit de l'ordre de $n_0^{-\frac{1}{2}}$, nous trouvons :

1° des termes de la forme $\Psi_{\sigma\tau}^{*(0)}, \ldots, \Psi_{\sigma\tau}^{*(\mathbf{k})}$, et $\Psi_{\sigma\tau}^{(\mathbf{k})*}, \ldots, \Psi_{\sigma\tau}^{*(0)}$ qui sont de l'ordre de $n_0^{-\frac{1}{2}}$;

2° des termes de la forme $\dot{\Psi}_{\sigma\tau}^{*(0)}, \ldots, \dot{\Psi}_{\sigma\tau}^{*(0)}$, qui sont finis.

Finalement, nous ne pouvons conserver dans les deux membres de l'équation que les termes finis ce qui, en introduisant la constante

$K = K'\sqrt{n_0}$, nous conduit à écrire

$$(32)\quad \frac{hc}{2\pi i}\sum_{1}^{3}{}_{j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\left[\frac{\mathcal{B}_j - \mathcal{A}_j}{2}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4 + \frac{\mathcal{B}_j - \mathcal{A}_j}{2}\right]\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi^{*(\mathbf{k})}_{\sigma\tau} + \text{termes en } k_0$$

$$= \mathrm{k}\left[\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}(1 - \mathcal{A}_4\mathcal{B}_4)\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\rho - \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2}\qquad\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\qquad\right)\right].$$

D'après les remarques faites précédemment, les deux termes du crochet dans le premier membre sont égaux et, dans le second membre, les deuxième et troisième termes du crochet sont nuls. Quant au premier terme du crochet, dans le second membre, il vaut 8ρ. Bref, on a en négligeant les termes en k_0

$$(33)\qquad \frac{hc}{2\pi i}\sum_{1}^{3}{}_{j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi^{*0}_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{B}_j\mathcal{B}_4\mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_j\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4}{2}\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi^{*(\mathbf{k})}_{\sigma\tau} = 4\,\mathrm{k}\,\rho.$$

Or la définition des champs en Mécanique ondulatoire du photon [1] donne

$$(34)\qquad E_j = i\,\mathrm{k}\,k_0\Psi^{*0}_{\sigma\tau}\frac{\mathcal{A}_j\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4 - \mathcal{B}_j\mathcal{B}_4\mathcal{A}_4}{2}\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi^{*(\mathbf{k})}_{\sigma\tau}\qquad (j = 1, 2, 3),$$

ce qui, en multipliant (33) par Kk_0, permet d'écrire

$$(35)\qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{8\pi}{hc}\mathrm{k}^2 k_0\rho.$$

Or, on a

$$(36)\qquad \mathrm{k} = \frac{h}{4\pi\sqrt{\mu_0}},\qquad k_0 = \frac{2\pi}{h}\mu_0 c,\qquad \mathrm{k}^2 k_0 = \frac{hc}{8\pi},$$

et par suite

$$(37)\qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho.$$

Ici $\mathbf{E}$ et ρ sont les grandeurs complexes définies par (22) et (34). En passant aux grandeurs réelles correspondantes suivant le schéma général $F_r = F + F^*$, nous obtenons

$$(38)\qquad \operatorname{div}\mathbf{E}_r = \operatorname{div}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) = \rho + \rho^* = \rho_r,$$

$\mathbf{E}_r$ est donc ici le champ électrique réel superquantifié : c'est un opérateur de l'espace des n. Pour obtenir une équation numérique,

---

[1] *Voir* Chapitre III, formules (30).

multiplions les deux membres de (38) en avant par $R_1^*(n_0, n_1, \dots)$ et en arrière par $R_1(n_0, n_1, \dots)$ et sommons sur n. Nous souvenant que $\sum_n |R_1|^2 = 1$, nous trouvons finalement

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}} = \rho, \qquad \left(\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \overline{\sqrt{n_{\mathbf{k}}}\, \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(r)}}\right), \tag{39}$$

où $\bar{\mathbf{E}}$ est la valeur moyenne dans l'espace des n du champ électrique $\mathbf{E}$. Nous savons que, pour les champs à très grand nombre de photons, $\mathbf{E}$ représente le champ macroscopique observable : il coïncide donc avec le champ $\mathbf{E}$ de la théorie de Lorentz et l'équation $\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho$ se trouve ainsi justifiée [1].

Un raisonnement fournirait de même (en négligeant toujours les termes en k_0) l'équation de Lorentz $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \rho\frac{\vec{v}}{c}$. Enfin, en conservant cette fois les termes en k_0, on pourrait tirer de l'équation (20) les relations

$$\bar{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{A}}, \qquad \bar{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathbf{A}}}{\partial t} - \overline{\operatorname{grad} V}, \tag{40}$$

dont on tirerait ensuite les équations

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{41}$$

L'ensemble des équations de Lorentz peut ainsi être retrouvé à partir de l'équation d'ondes du système photon-électron.

Notons que, conformément à une remarque faite à la fin du paragraphe 8 du chapitre précédent, les interactions entre particules électrisées apparaissent, à la lumière de la théorie précédente, comme liées à des transitions qui font passer le photon d'un état d'annihilation à un autre : c'est ce que montre le rôle des termes de la forme $\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}, \dots, \Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$ dans les raisonnements précédents.

4. Remarque sur la relation $\sum_{\sigma\tau} \Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = -4$. — La première relation (26) que nous écrirons avec sommation des indices

$$\Psi^{*(0)}_{\sigma\tau}\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = -4 \tag{42}$$

[1] Notons en passant que les champs de la théorie de Lorentz apparaissent ici, du point de vue quantique comme *macroscopiques* alors que, comparés aux champs de la théorie de Maxwell, ils apparaissaient au contraire du point de vue classique comme microscopiques.

est aisée à vérifier d'après les définitions de $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{B}_4$. Elle soulève une difficulté étroitement apparentée à la difficulté relative à la fonction $\Psi^{(0)}$ que nous avons discutée au Chapitre III, paragraphe 5.

Écrivons, en effet, les équations d'ondes du photon sous la forme

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_1 + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}_2 + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_3 + i k_0\mathcal{A}_4\right)\Psi_{\sigma\tau}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\Psi_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{B}_1 + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{B}_2 + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{B}_3 + i k_0\mathcal{B}_4\right)\Psi_{\sigma\tau}. \end{cases}$$

La difficulté que nous connaissons déjà est que les $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau} = (\alpha_4)_{\sigma\tau}$ étant des constantes, ne sont pas solutions des équations (43) si l'on pose $k_0 \neq 0$.

Voici maintenant en quoi consiste la difficulté relative à l'équation (42): Multiplions les deux équations (43) respectivement par $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{B}_4$ et $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4$, sommons sur les indices et ajoutons. Les termes contenant des dérivées sont tous nuls en vertu des définitions des $\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}$, des $\mathcal{A}_r$ et des $\mathcal{B}_r$; il nous reste

$$(44)\qquad 2 i k_0 \Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi_{\sigma\tau} = 0,$$

ou *si* $k_0 \neq 0$

$$(45)\qquad \Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi_{\sigma\tau} = 0.$$

Introduisons le développement (31) de $\Psi_{\sigma\tau}$: il vient

$$(46)\qquad c_0\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi^{(0)}_{\sigma\tau} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi^{(\mathbf{k})}_{\sigma\tau} = 0,$$

c_0 étant proportionnel à $\sqrt{n_0}$, le second terme de (46) est négligeable devant le premier et nous trouvons

$$(47)\qquad \Psi^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi^{(0)}_{\sigma\tau} \simeq 0,$$

relation visiblement inconciliable avec (42).

Pour lever la difficulté relative à $\Psi^{(0)}$, nous avons introduit, au Chapitre III, l'hypothèse suivante : nous avons supposé que l'espace-temps constitue une coupe à x_0 constant dans un espace à cinq dimensions x_0xyzt et nous avons attribué aux fonctions d'onde représentant des états non annihilés la forme

$$(48)\qquad \Psi_{\sigma\tau} = f_{\sigma\tau}(x, y, z, t)\, e^{i k_0 x_0}.$$

Dans ces conditions, si nous remplaçons les équations (43) par les suivantes

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Psi'_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_1 + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{A}_2 + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_3 + \dfrac{\partial}{\partial x_0}\mathcal{A}_4\right)\Psi'_{\sigma\tau}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Psi'_{\sigma\tau}}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{B}_1 + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{B}_2 + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{B}_3 + \dfrac{\partial}{\partial x_0}\mathcal{B}_4\right)\Psi'_{\sigma\tau}. \end{cases}$$

qui présentent une agréable symétrie, il devient évident que les fonctions $\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau} \equiv (\alpha_4)_{\sigma\tau}$ sont solutions de (49), tandis que les fonctions d'onde des états non annihilés ayant la forme (48) restent solutions de (43).

Mais il se trouve, ce qui est très intéressant, que la substitution de (48) à (43), en permettant de lever la difficulté relative à $\Psi^{(0)}$, permet aussi de lever la difficulté relative à l'équation (42). Reprenant le procédé qui avec les équations (43) nous menait à la difficulté en question, nous multiplierons les équations (49) respectivement par $\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{B}_4$ et $\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4$, nous sommerons sur les indices et nous ajouterons, ce qui nous donnera

$$(50)\quad \Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\frac{\partial \Psi'_{\sigma\tau}}{\partial x_0} = \Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\frac{\partial}{\partial x_0}\left(c_0\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau} + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi'^{(\mathbf{k})}_{\sigma\tau}\right) = ik_0\Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi''_{\sigma\tau},$$

où

$$(51)\qquad \Psi''_{\sigma\tau} = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\Psi'^{(\mathbf{k})}_{\sigma\tau}$$

représente l'état non annihilé du photon. Si k_0 est différent de zéro, on en déduit

$$(52)\qquad \Psi'^{(0)}_{\sigma\tau}\mathcal{A}_4\mathcal{B}_4\Psi''_{\sigma\tau} = 0.$$

Or le premier membre de (52) est égal d'après la définition (31) du Chapitre III à l'invariant I_1 de la Mécanique ondulatoire du photon. Nous retrouvons donc seulement ainsi le résultat déjà connu suivant lequel, si la masse propre μ_0 n'est pas nulle, l'invariant I_1 est nul, résultat qui n'est aucunement en contradiction avec la relation (42). La difficulté relative à cette relation se trouve donc levée par la substitution des équations (49) aux équations (43).

CHAPITRE XIII.

THÉORIE MULTITEMPORELLE DE MM. DIRAC, FOCK ET PODOLSKY.

1. **Idées générales.** — Nous allons maintenant examiner rapidement une théorie intéressante développée primitivement par MM. Dirac, Fock et Podolsky (¹) et approfondie par divers auteurs, notamment par M. Félix Bloch (²) et M. Wentzel (³). Le but de cette théorie est essentiellement de mettre bien en évidence le caractère d'invariance relativiste des équations d'interaction entre photons et électrons.

Pour saisir le principe de la méthode, considérons n électrons en interaction avec des rayonnements. Suivant le point de vue adopté antérieurement, nous appliquerons aux photons la seconde quantification sans l'appliquer aux électrons. Les photons sont alors repérés *par un seul jeu* de coordonnées xyz et les électrons par les coordonnées $X_1Y_1Z_1$, $X_2Y_2Z_2$ ..., $X_nY_nZ_n$: de plus, on fait intervenir un seul temps t, temps de l'observateur ou du système. Mais cet emploi d'un temps unique à côté des $3(n+1)$ coordonnées d'espace brise la symétrie entre espace et temps qui caractérise la théorie de la relativité. Pour rétablir cette symétrie, les auteurs de la théorie multitemporelle ont eu l'idée suivante : il convient d'attribuer à chaque particule un temps spécial de façon à obtenir $4(n+1)$ coordonnées d'espace-temps, mais en remarquant que toutes nos observations sont faites pour une valeur commune de tous ces temps, valeur égale au temps t de l'observateur, de telle sorte que les équations utilisables s'expriment finalement à l'aide de ce temps unique. On développera donc la théorie et ses formules en distinguant le temps t des photons et les temps individuels $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des électrons, ce qui mettra en évidence l'invariance relativiste ; puis à la fin des calculs, pour en arriver à la prévision des faits observables,

(¹) *Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion*, 2, 1932, p. 468.
(²) *Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion*, 51, 1934, p. 301.
(³) *Zeitschr. f. Phys.*, 86, 1933, p. 479 et 87, 1934, p. 726.

on devra poser dans toutes les formules obtenues

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t, \tag{1}$$

ce temps commun étant le temps de l'observateur.

Les auteurs de la théorie multitemporelle l'ont développée dans le cadre de la théorie quantique des champs usuelle où l'hypothèse implicite $\mu_0 = 0$ oblige, nous l'avons vu, à admettre que les opérateurs $\operatorname{div}\mathbf{E}$ et $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{H}$ de l'espace des n, au lieu d'être identiquement égaux à zéro comme les opérateurs $\operatorname{div}\mathbf{H}$ et $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E}$, donnent seulement zéro quand on les applique à la fonction de répartition R (ce sont des conditions sur R et non des identités en chaque point $xyzt$ de l'espace-temps des photons). Comme ici nous adoptons le point de vue de la Mécanique ondulatoire du photon suivant lequel tous les opérateurs

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} + k_0^2 \mathrm{V}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{H} - k_0^2 \mathbf{A}$$

sont identiquement nuls en tout point de l'espace-temps $xyzt$, nous allons pouvoir éviter quelques complications qui se rencontrent dans les démonstrations usuelles de la théorie multitemporelle.

2. Équations de la théorie multitemporelle. — Considérons un électron en présence d'un champ électromagnétique contenant beaucoup de photons. En reprenant les calculs exposés au paragraphe 2 du chapitre précédent, on peut écrire pour l'électron l'équation d'ondes

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}_1(n_0, n_1, \ldots)\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\rho(\mathbf{R}, t) \\ &\quad = \mathrm{R}_1(n_0, n_1, \ldots)\mathrm{H}_0\Psi_\rho(\mathbf{R}, t) - e\left[\mathrm{V}_r 1 + (\vec{\alpha}\,\mathbf{A}_r)\right]\mathrm{R}_1(n_0, n_1, \ldots)\Psi_\rho(\mathbf{R}, t), \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\mathrm{V}_r = \sum_{\mathbf{k}}(c_{\mathbf{k}}\mathrm{V}_{\mathbf{k}} + c_k^* \mathrm{V}_k^*); \qquad \mathrm{A}_r = \sum_{\mathbf{k}}(c_{\mathbf{k}}\mathrm{A}_{\mathbf{k}} + c_k^* \mathrm{A}_k^*). \tag{3}$$

$\mathrm{V}_{\mathbf{k}}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ sont les potentiels normés de l'onde $\mathbf{k}$, $c_{\mathbf{k}}$ et $c_{\mathbf{k}}^*$ les opérateurs de la seconde quantification. $\mathrm{R}_1(n_0, n_1 \ldots)$ est la fonction de répartition des photons débarrassée du facteur de phase $e^{2\pi i \sum_j n_j \nu_j t}$ et par suite indépendante du temps.

Mais supposons qu'il y ait n électrons et attribuons à chacun un temps t_n. Représentons par n l'ensemble des nombres n_0, n_1, ... et par

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \ldots \mathbf{r}_n$ les rayons-vecteurs qui définissent la position des divers électrons. La fonction d'onde du système sera définie par

$$(4)\quad \Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}(n, \mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \ldots, \mathbf{r}_n, t_n) = \mathrm{R}_1(n)\Psi_\alpha^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1)\Psi_\beta^{(2)}(\mathbf{r}_2, t_2)\ldots\Psi_\gamma^{(n)}(\mathbf{r}_n, t_n),$$

et ne dépendra pas du temps t des photons. La théorie multitemporelle écrit que la fonction d'onde (4) doit satisfaire aux n équations suivantes

$$(5)\quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t_j}\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu} = \mathrm{H}_0^{(j)}\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu} - e\left|\mathrm{V}_r(\mathbf{r}_j, t_j)1^{(j)} + \left(\vec{\alpha}^{(j)}\mathbf{A}_r(r_j, t_j)\right)\right|\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu},$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, où $\mathrm{H}_0^{(j)}$ est l'hamiltonien de Dirac du j^{e} électron

$$(6)\quad \mathrm{H}_0^{(j)} = \frac{hc}{2\pi i}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\alpha_1^{(j)} + \frac{\partial}{\partial y_j}\alpha_2^{(j)} + \frac{\partial}{\partial z_j}\alpha_3^{(j)} + i m_0 c\,\alpha_4^{(j)}\right].$$

Les n équations (5) possèdent évidemment l'invariance bien connue des équations de Dirac, invariance qui se trouve ainsi mise en évidence par l'introduction des temps individuels $t_1, \ldots, t_n$.

Au sujet des équations (5), M. Félix Bloch a fait l'intéressante remarque suivante. Écrivons-les

$$(7)\quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\partial t_j} = \mathrm{H}^{(j)}\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

avec

$$(8)\quad \mathrm{H}^{(j)} = \mathrm{H}_0^{(j)} - e\left[\mathrm{V}_r(\mathbf{r}_j, t_j)1^{(j)} - \left(\vec{\alpha}^{(j)}\mathbf{A}_r(\mathbf{r}_j, t_j)\right)\right].$$

On trouve pour deux valeurs j et k de l'indice

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_j}\dfrac{\partial\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\partial t_k} = \dfrac{2\pi i}{h}\mathrm{H}^{(k)}\dfrac{\partial\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\partial t_j} = \dfrac{2\pi i}{h}\mathrm{H}^{(k)}\mathrm{H}^{(j)}\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t_k}\dfrac{\partial\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\partial t_j} = \dfrac{2\pi i}{h}\mathrm{H}^{(j)}\dfrac{\partial\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}}{\partial t_k} = \dfrac{2\pi i}{h}\mathrm{H}^{(j)}\mathrm{H}^{(k)}\Psi_{\alpha\beta\ldots\nu}. \end{cases}$$

Pour que les équations (9) soient compatibles, il faut donc avoir

$$(10)\quad [\mathrm{H}^{(j)}, \mathrm{H}^{(k)}] = 0$$

pour tout j et tout k. Or la seule chose qui puisse empêcher $\mathrm{H}^{(j)}$ de commuter avec $\mathrm{H}^{(k)}$, c'est la non-commutation des potentiels électromagnétiques relatifs aux lieux $\mathbf{r}_j$ et $\mathbf{r}_k$. Nous avons vu qu'il ne peut y avoir non-commutation que si les deux événements $x_j y_j z_j t_j$ et $x_k y_k z_k t_k$ peuvent agir l'un sur l'autre : il y a toujours commutation si chaque événement est en dehors du cône de lumière de l'autre. En d'autres termes, les équations (5) d'indices j et k ne sont compatibles que si les événe-

ments $x_j y_j z_j t_j$ et $x_k y_k z_k t_k$ peuvent être rendus simultanés par un choix convenable du système de référence.

Il est évident que si l'on identifie tous les temps dans les équations (5), on est ramené, dans le cas d'un seul électron, à l'équation (2), ce qui établit l'accord des équations de la théorie multitemporelle avec celles de la théorie à un seul temps.

3. Introduction des potentiels de Wentzel. — Nous devons maintenant définir les grandeurs électromagnétiques non plus dans l'espace-temps à 4 dimensions des photons, mais dans l'espace-temps multiple à $4(n+1)$ dimensions du système envisagé. Ici ces grandeurs vont être fonctions non seulement des coordonnées $xyzt$ relatives aux photons, mais aussi de l'ensemble des coordonnées $x_1 y_1 z_1 t_1 \ldots x_n y_n z_n t_n$ des n charges électriques. Le développement de la théorie multitemporelle a amené MM. Dirac, Fock et Podolsky à introduire des potentiels d'un type nouveau dont M. Wentzel a ensuite souligné l'importance. Avec M. Dirac, nous les nommerons *les potentiels de Wentzel.*

Pour introduire ces nouvelles grandeurs, nous nous servirons d'abord des conceptions classiques qui attribuent à chaque charge électrique ponctuelle une ligne d'Univers bien déterminée. Sur la ligne d'Univers de la j^e particule de charge ε_j (si c'est un électron $\varepsilon_j = -e$), nous choisissons un point de coordonnées d'Univers $x_\mu^{(j)}$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ correspondant à l'abscisse curviligne s_j comptée à partir d'une origine arbitraire prise sur la ligne d'Univers. Ceci fait, si nous considérons les coordonnées $xyzt$ du photon, le potentiel de Wentzel dans l'espace-temps $4(n+1)$ dimensionnel au point de coordonnées $xyzt$, $x_1 y_1 z_1 t_1, \ldots, x_n y_n z_n t_n$, est par définition en notation d'Univers

$$(11) \qquad A_\mu(x, \ldots, t_n) = A_\mu^{(0)}(x, y, z, t) + \sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} \int_{-\infty}^{s_j} D_j \frac{dx_\mu^{(j)}}{ds_j} ds_j,$$

ou encore

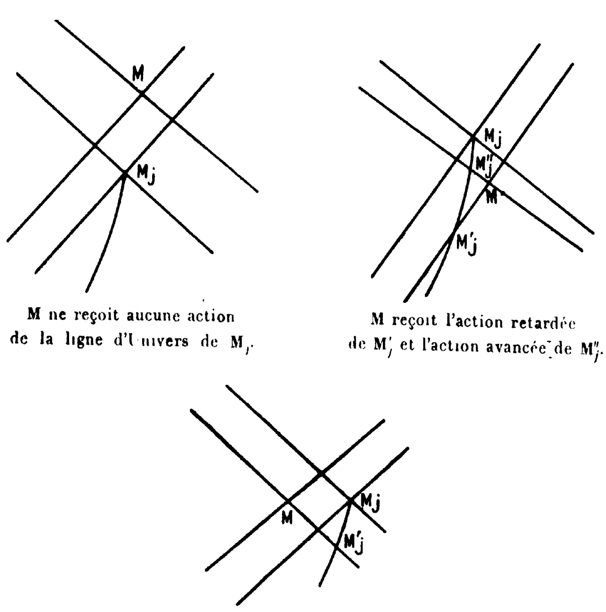
$$(12) \qquad A_\mu(x, \ldots, t_n) = A_\mu^{(0)}(x, y, z, t) + \sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} \int_{-\infty}^{x_\mu^j} D_j \, dx_\mu^{(j)},$$

$A_\mu^{(0)}(x, y, z, t)$ étant la composante μ du potentiel tel qu'il existerait en l'absence des charges et D_j étant la fonction singulière invariante définie au paragraphe 8 du Chapitre VIII et relative à la j^e charge, c'est-à-dire la fonction $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, t - t_j)$.

Si l'on admet la nullité de μ_0, la fonction $D(\mathbf{r}, t)$ se réduit, nous le savons, à la fonction singulière de Pauli-Heisenberg

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(ct + r) - \delta(ct - r)}{r}. \tag{13}$$

L'expression (13) de Δ conduit aisément aux intéressantes conclusions suivantes : pour un point $xyzt$ situé dans la partie *avenir* du cône de lumière relatif au point choisi sur la ligne d'Univers de la j^e charge, la contribution de cette j^e charge au potentiel de Wentzel est nulle; pour un point $xyzt$ situé sur la partie *passé* du cône de lumière relative au



M ne reçoit aucune action de la ligne d'Univers de M_j.

M reçoit l'action retardée de M'_j et l'action avancée de M''_j.

M reçoit seulement l'action retardée de M'_j.

Fig. 3.

point choisi sur la ligne d'Univers de la j^e charge, la contribution de cette j^e charge au potentiel de Wentzel est égale à la différence entre le potentiel retardé et le potentiel avancé; enfin pour un point $xyzt$ situé en dehors du cône de lumière relatif au point choisi sur la ligne d'Univers de la j^e charge, la contribution de cette charge se réduit au potentiel retardé. C'est dans ce dernier cas que l'on doit se placer pour toutes

les charges j (c'est-à-dire qu'on doit choisir sur les lignes d'Univérs des points tels que les régions extérieures aux cônes de lumière aient des parties communes et placer le point M dans cette partie commune) pour pouvoir faire $t = t_1 = \ldots t_n$. Les schémas ci-contre illustrent les trois cas que nous venons de distinguer.

Il nous est maintenant facile de trouver deux équations importantes auxquelles satisfont les potentiels de Wentzel. Tout d'abord, on a

$$(14) \qquad \square A_\mu = \square A_\mu^{(0)} + \sum \frac{\varepsilon_j}{8\pi} \int_{-\infty}^{x_\mu^j} \square D_j \, dx_\mu^{(j)}.$$

Or, $A_\mu^{(0)}$ étant le potentiel de la Mécanique ondulatoire du photon dans le vide,

$$(15) \qquad \square A_\mu^{(0)} = -k_0^2 A_\mu^{(0)}, \qquad \square D_j = -k_0^2 D_j,$$

d'où

$$(16) \qquad \square A_\mu = -k_0^2 A_\mu,$$

et si l'on suppose k_0^2 négligeable

$$(17) \qquad \square A_\mu = 0.$$

Ensuite calculons la divergence $\sum_1^4{}_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$. Nous trouvons (avec sommation des indices)

$$(18) \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial A_\mu^{(0)}}{\partial x_\mu} + \sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} \int_{-\infty}^{x_\mu^j} \frac{\partial D_j}{\partial x_\mu} \, dx_\mu^{(j)}.$$

Mais

$$(19) \qquad \frac{\partial D_j}{\partial x_\mu} = -\frac{\partial D_j}{\partial x_\mu^{(j)}},$$

puisque D_j ne dépend que de $x_\mu - x_\mu^{(j)}$. D'où

$$(20) \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial A_\mu^{(0)}}{\partial x_\mu} - \sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} D_j = -\sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} D_j,$$

car les $A_\mu^{(0)}$ satisfont à la relation des potentiels de Lorentz.

Jusqu'ici, nous avons défini les potentiels de Wentzel en nous servant de l'image classique qui attribue à chaque particule électrisée une ligne d'Univers bien définie. Mais nous savons qu'une semblable image n'est plus valable en Mécanique ondulatoire. Pour nous en affranchir,

nous définirons les potentiels de Wentzel comme des grandeurs obéissant, quand $\mu_0 = 0$, aux équations

$$(21) \qquad \square A_\mu = 0; \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = -\sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} D_j.$$

Remarquons que les grandeurs ainsi définies sont les grandeurs complexes dont on déduira les grandeurs réelles par la formule usuelle

$$(22) \qquad F_r = F + F^*.$$

4. Déductions des équations de Lorentz. — Nous déduirons les champs (complexes) de Wentzel à partir des potentiels complexes par les formules classiques

$$(23) \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

De cette définition, dérive immédiatement les équations

$$(24) \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

où μ, ν, ρ sont trois des quatre nombres 1, 2, 3, 4. Écrites en notation vectorielle, elles nous donnent

$$(25) \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,$$

les champs **E** et **H** étant les champs complexes de Wentzel qui sont des opérateurs de l'espace des n dont la valeur dépend des coordonnées $xyzt$, $x_1 y_1 z_1 t_1 \ldots x_n y_n z_n t_n$. Soit f l'une quelconque des composantes des champs de Wentzel : par définition, nous poserons comme valeur moyenne de cette composante

$$(26) \qquad \bar{f}(\mathbf{r}, t, t_1, \ldots, t_n) = \sum_n \int_{3n} \ldots \int d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n \Psi^*(n, r_1, t_1, \ldots, r_n, t_n) f \Psi(n, r_1, t_1, \ldots, r_n, t_n).$$

L'on voit que dans (26) la moyenne ne porte pas sur les coordonnées $xyzt$ des photons, mais seulement sur les nombres n. Donc $\bar{f}$ dépend de $xyzt$ et des temps individuels $t_1 \ldots t_n$ des électrons.

Multiplions (25) par R^* à gauche et par R à droite, sommons sur les n, intégrons sur les coordonnées d'espace des électrons et ajoutons au

résultat obtenu la quantité complexe conjuguée, il vient :

$$(27) \qquad -\frac{1}{c}\overline{\frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial t}} = \overline{\text{rot}\,\mathbf{E}_r}, \qquad \overline{\text{div}\,\mathbf{H}_r} = 0.$$

Partant toujours des définitions (23), nous trouvons de même

$$(28) \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\text{div}\,\mathbf{A}) - \Box A_\mu,$$

d'où, en vertu de (21), c'est-à-dire en supposant $\mu_0 = 0$,

$$(29) \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -\sum \frac{\varepsilon_j}{8\pi}\frac{\partial D_j}{\partial x_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

En notation vectorielle, ces équations s'écrivent

$$(30) \qquad \text{div}\,\mathbf{E} = -\sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi c}\frac{\partial D_j}{\partial t}; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathbf{H} - \sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi}\overrightarrow{\text{grad}}\,D_j.$$

Opérons sur ces équations comme sur les équations (25); nous trouvons

$$(31) \qquad \overline{\text{div}\,\mathbf{E}_r} = -\sum_j \frac{\varepsilon_j}{4\pi c}\overline{\frac{\partial D_j}{\partial t}}; \qquad \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial t}} = \overline{\text{rot}\,\mathbf{H}_r} - \sum_j \frac{\varepsilon_j}{4\pi}\overline{\overrightarrow{\text{grad}}\,D_j}.$$

Pour trouver les équations applicables aux faits observables, nous devons maintenant opérer dans les formules (27) et (31) la confusion des temps définie par la relation (1). Mais, avant de procéder à cette opération, nous ferons quelques remarques préliminaires.

Revenons à la définition (26) des valeurs moyennes. Il est d'abord à noter que l'on a

$$(32) \qquad \frac{\partial \bar f}{\partial t_j} = \frac{2\pi i}{h}\overline{[f, H^{(j)}]},$$

comme cela résulte aisément des raisonnements généraux classiques rappelés au Chapitre I. D'autre part, comme la fonction Ψ de la théorie multitemporelle ne contient ni le temps t des photons, ni les coordonnées xyz, on a évidemment

$$(33) \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\bar f, \qquad \overline{\text{grad}\,f} = \text{grad}\,\bar f.$$

Mais si l'on opère la confusion des temps $\bar f(\mathbf{r}, t, t_1, \ldots, t_n)$ devient $\bar f(\mathbf{r}, t, t \ldots t)$ et il y a lieu de considérer la dérivée *totale* $\frac{\partial}{\partial t}\bar f$ par rap-

port à t qui est égale à

$$(34)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{f}(\mathbf{r}, t, t, \ldots, t) = \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial \overline{f}}{\partial t_j}\right)_{t_j = t} = \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_j \frac{2\pi i}{h}\overline{[f, H^{(j)}]}\right)_{t_j = t}$$

Les quantités $[\mathbf{f}, H^{(j)}]$ qui interviennent ainsi proviennent de la non-commutation de la grandeur f avec les termes

$$-e\left[V_r(\mathbf{r}_j, t_j)\,1^{(j)} - \left(\vec{\alpha}^{(j)}\mathbf{A}_r(r_j, t_j)\right)\right]$$

contenu dans $H^{(j)}$: elles sont facilement calculables à partir des formules de commutation des grandeurs électromagnétiques quand f est une composante de champ

Revenons aux équations (27) et (31) et opérons-y la confusion des temps individuels. Dans la première équation (27), nous aurons à remplacer

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{H}_r}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\mathbf{H}_r}}{\partial t} \qquad \text{par} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{H}_r} - \sum \frac{2\pi i}{h}\overline{[\mathbf{H}_r, H^{(j)}]}.$$

Or, on peut vérifier en partant des formules de commutation du Chapitre VIII, paragraphe 2, que $[\mathbf{H}_r, H^{(j)}] = 0$. Il reste donc

$$(35)\qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{H}_r} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{E}_r}, \qquad \operatorname{div}\overline{\mathbf{H}_r} = 0,$$

c'est-à-dire les équations de Lorentz sans second membre pour les grandeurs réelles moyennes.

La transformation des équations (31) est plus délicate. Comme nous avons

$$(36)\qquad \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{D}_j}{\partial t}\right)_{t_j = t} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j); \qquad (\mathrm{D}_j)_{t_j = t} = 0,$$

nous trouverons d'abord

$$(37)\qquad \operatorname{div}\overline{\mathbf{E}_r} = \sum_j \varepsilon_j\,\overline{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}$$
$$= \sum_j \varepsilon_j \sum_n \int \cdots \int d\mathbf{r}_1, \ldots, d\mathbf{r}_n$$
$$\times\,|\,\mathrm{R}_1(n)\Psi_p^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1), \ldots, \Psi_p^{(n)}(\mathbf{r}_n, t_n)|^2\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$
$$= \sum_j \varepsilon_j \Psi_p^{(j)*}(\mathbf{r}, t)\Psi_p^{(j)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \rho_j,$$

ρ_j étant la densité de charge au point $\mathbf{r}$ à l'instant t associée au j^e électron, puis

$$(38) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_t = \text{rot}\,\mathbf{H}_t + \sum_j \frac{2\pi i}{h}[\mathbf{E}_t, H^{(j)}]_{t_j=t}.$$

Or on vérifie à l'aide de la formule (69) du Chapitre VIII que l'on a

$$(39) \qquad [\mathbf{E}, H^{(j)}]_{t_j=t} = \varepsilon_j \frac{h}{4\pi i}\vec{\alpha}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j),$$

et par suite

$$(40) \qquad \sum_j \frac{2\pi i}{h}[\mathbf{E}_t, H^{(j)}] = \sum_j \frac{1}{c}\varepsilon_j \sum_n \int \dots \int d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_n \Psi^* \alpha_j c \Psi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$$
$$= \frac{1}{c}\sum_j \varepsilon_j \Psi_\rho^{(j)*}(\mathbf{r}, t)\vec{\alpha}_j c \Psi_\rho^{(j)}(\mathbf{r}, t) = -\sum_j \mathbf{i}_j,$$

où i_j est la densité de courant associé au j^e électron.

Finalement, en désignant par ρ et $\mathbf{i}$ les densités de charge et de courant électriques associées à l'ensemble des n particules chargées de façon à avoir

$$(41) \qquad \rho = \sum_1^n \rho_j, \qquad \mathbf{i} = \sum_1^n \mathbf{i}_j,$$

il vient

$$(42) \qquad \text{div}\,\overline{\mathbf{E}_t} = \rho; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathbf{E}_t}}{\partial t} = \text{rot}\,\overline{\mathbf{H}_t} - \mathbf{i},$$

c'est-à-dire les équations de Lorentz avec second membre.

Telle est la manière de déduire les équations de Lorentz en théorie multitemporelle.

Ces considérations ont été souvent présentées d'une façon peu intelligible parce que l'on négligeait de préciser que l'on considère toujours des moyennes impliquant une certaine vue macroscopique des phénomènes. Comme dans les raisonnements développés dans les précédents chapitres dans le cadre de la Mécanique ondulatoire du photon, c'est seulement en faisant intervenir de telles moyennes macroscopiques que l'on peut retrouver les équations de Lorentz.

La formule (20) que l'on peut écrire

$$(43) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}\,\mathbf{A} = -\sum_j \frac{\varepsilon_j}{8\pi} D_j$$

conduit à la relation

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{V_r}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}_r} = -\sum_j \frac{\varepsilon_j}{4\pi} \overline{D_j}, \tag{44}$$

puis, après confusion des temps individuels, à

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{V_r} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}_r} = \sum_j \frac{2\pi i}{h}\left[\overline{V_r},\ H^{(j)}\right]_{t_j=t}. \tag{45}$$

Or la formule de commutation (68) du Chapitre VIII donne, en remarquant que pour $t = t_j$, D_j et ses dérivées secondes sont nulles

$$\left[\overline{V_r},\ H^{(j)}\right]_{t_j=t} = 0. \tag{46}$$

Il nous reste donc la formule

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overline{V_r} + \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}_r} = 0. \tag{47}$$

La relation de Lorentz entre les potentiels est donc aussi satisfaite dans la théorie multitemporelle.

La théorie multitemporelle a donné lieu à d'intéressantes tentatives concernant la question de l'énergie propre des particules. Nous avons vu comment les théories quantiques conduisent pour ces énergies propres à des valeurs infinies inacceptables. En se servant de la théorie multitemporelle et des potentiels de Wentzel [1], on a cherché à éviter cette difficulté. Malgré quelques résultats intéressants, il ne semble pas que ces tentatives aient abouti jusqu'à présent à un succès complet : aussi n'y insisterons-nous pas ici.

---

(1) *Voir* notamment G. WENTZEL, *Zts. f. Phys.*, 86, 1933, p. 479 et 635; P. A. M. DIRAC, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 9, 1939, p. 13.

TABLE DES MATIÈRES.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIES SUPERQUANTIFIÉES.

TROISIÈME PARTIE

INTERACTIONS ENTRE MATIÈRE ET RAYONNEMENT.

123320. Impr. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Dépôt légal éditeur, 1948, n° 192. | Dépôt légal imprimeur, 1948, n° 418.
Achevé d'imprimer le 25 octobre 1948.